गणित

भाग II

गणित

कक्षा 9 के लिए पाठ्यपुस्तक
भाग II

ए.एम. वैद्य ईश्वर चन्द्र
जे.डी. गुप्ता के.वी. राव
राम अवतार आर. विट्ठल राव
यू.एन. सिंह वी.जी. टिकेकर

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

सितम्बर 1989
आश्विन 1911
PD 140T—SD

प्रकाशन सहयोग

सी.एन. राव : **अध्यक्ष, प्रकाशन विभाग**

प्रभाकर द्विवेदी : **मुख्य सम्पादक**
दिनेश सक्सेना : **सम्पादक**
शर्मा दत्त : **सहायक सम्पादक**

यू. प्रभाकर राव : **मुख्य उत्पादन अधिकारी**
सुरेन्द्र कान्त शर्मा : **उत्पादन अधिकारी**
टी.टी. श्रीनिवासन : **सहायक उत्पादन अधिकारी**
राजेन्द्र चौहान : **उत्पादन सहायक**

आवरण : कर्ण चड्ढा

मूल्य रु. 11.50

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा प्रिंट एंड फोटो सैटर्स, बी 62/8, नारायणा इंडस्ट्रियल एरिया, फेज़ II, नई दिल्ली 110028 द्वारा फोटो कंपोज होकर इंडियन प्रिंटिंग वर्क्स, 4 ई., रानी झाँसी रोड, नई दिल्ली 110055 में मुद्रित।

विषय सूची

गांधी जी का जन्तर

तुम्हें एक जन्तर देता हूं। जब भी तुम्हें सन्देह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आजमाओ :

जो सबसे गरीब और कमजोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शकल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुंचेगा ? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा ? यानि क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है ?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा सन्देह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।

अध्याय 8

ज्यामिति की मौलिक संकल्पनाएं

8.1 ऐतिहासिक परिचय

शब्द 'ज्यामिति' यूनानी भाषा के दो शब्दों *'जियो' (geo)* और *'मेट्रन' (metron)* से बना है। 'जियो' का अर्थ है, पृथ्वी या भूमि और 'मेट्रन' का अर्थ है, 'मापना'। इस प्रकार ज्यामिति के उद्गम को मानव सभ्यता के विकास के उस काल से जोड़ना होगा, जब मनुष्य को सर्वप्रथम अपने भूमि-क्षेत्रों को नापने की आवश्यकता पड़ी थी। सम्भवत: मिस्र निवासियों ने सर्व-प्रथम ज्यामिति का अध्ययन किया था। उनकी रुचि मुख्यत: क्षेत्रमिति की समस्याओं में थी, जैसे त्रिभुज, आयत आदि रेखीय आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करना। इस के पश्चात् बैबीलोन निवासियों ने भी भिन्न-भिन्न रैखिक आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या का अध्ययन किया और कुछ विशेष आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र निर्धारित किए। ये सूत्र बेबीलोन निवासियों के पुराने गणित शास्त्र *'रिहण्ड पेपिरस' (Rhind Papyrus) (1650 ईसा पूर्व)* में उपलब्ध हैं। मिस्र और बेबिलोन निवासियों, दोनों ने ही, ज्यामिति का अधिकांश प्रयोग व्यवहारिक कार्यों के लिए ही किया तथा उसको एक क्रमबद्ध विज्ञान के रूप में विकसित करने के लिए बहुत कम काम किया।

हड़प्पा और *मोहन्जोदड़ो* (जो दोनों अब पाकिस्तान में हैं), *लोथल* (गुजरात में) और *कालीबंगन* (राजस्थान में) में हुई खुदाइयों से ज्ञात होता है कि प्राचीन भारत में 2500 ईसा पूर्व से 1750 ईसा पूर्व की काल अवधि में, एक बड़े क्षेत्र में, एक विकसित सभ्यता फली फूली। इस क्षेत्र का विस्तार, उत्तर में पञ्जाब और उत्तर प्रदेश और दक्षिण में नर्मदा के मुहाने तक था। ये लोग, नगर की योजना बनाने, गोदी, सड़क और स्वच्छता संबंधी स्थलों को बनाने में निपुण और वास्तुकला में काफी कुशल थे। इन स्थानों पर पाये गए, मिट्टी के बर्तनों पर ज्यामितीय आकृतियां, जैसे प्रतिच्छेदी वृत्त, अर्धगोले, खुदी हुई पाई गई हैं। इससे स्पष्ट होता है कि उन्हें ज्यामिति का ज्ञान था, परन्तु हमारे पास ऐसे प्रमाण नहीं हैं, जिन से हमें इस बात का पता लग सके कि उनका ज्यामिति ज्ञान कितना था।

भारत में वैदिक काल में ज्यामिति का उद्गम वैदिक पूजा के लिए आवश्यक, भिन्न-भिन्न प्रकार की वेदियों और अग्नि-कुण्डों के निर्माण कार्य से हुआ। वेदी बनाने में आवश्यक माप करने के लिए एक रस्सी, जिसे 'सुल्व' कहते थे, का प्रयोग करते थे। 800 ईसा पूर्व से 500 ईसा पूर्व तक की रचित सुल्व सूत्रों (Sulba sutras) में वैदिक ऋषियों के ज्यामिति के ज्ञान के बारे में बहुत अधिक सूचनाएं हैं। *बौद्धायन*

सुल्व सूत्र (लगभग 800 ईसा पूर्व) में, जो इन सभी सूत्रों में सब से पुराना है, तथाकथित पाइथागोरस प्रमेय का स्पष्ट वर्णन मिलता है। सुल्व सूत्रों में उल्लेखित रचना विधियों से पाइथागोरस प्रमेय की उपपत्ति मिल जाती है। सुल्व सूत्रों में, भिन्न-भिन्न प्रकार की रैखिक आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र भी हैं।

ज्यामिति का यह ज्ञान, मिस्र निवासियों से यूनानियों तक पहुँचा। ऐसा जान पड़ता है कि 'मिलेटस' नामक एक नगर के व्यापारी *थेल्स (640 ईसा पूर्व से 546 ईसा पूर्व तक)* ने अपने यौवन काल में बहुत धन एकत्रित कर लिया और उसके पश्चात् अपना समय पर्यटन और अध्ययन में व्यतीत किया। एक बार जब वह मिस्र में यात्रा पर था, तो उसमें ज्यामिति के प्रति रुचि उत्पन्न हो गई। यूनान वापिस आने पर, उसने अपने मित्रों को ज्यामिति सिखाई। *पाइथागोरस (580 ईसा पूर्व-500 ईसा पूर्व)* थेल्स के शिष्यो में सबसे अधिक प्रसिद्ध था। उसने ज्यामिति के बहुत से महत्वपूर्ण तथ्यों को सिद्ध किया।

यूक्लिड (लगभग 300 ईसा पूर्व) एक अन्य सुप्रसिद्ध यूनानी गणितज्ञ था। इसे ज्यामिति का पिता भी कहा जाता है। उसने ज्यामिति के अध्ययन में एक नई विचार धारा का शुभारम्भ किया। यूक्लिड ने, ज्यामिति के तथ्यों को *निगमनिक तर्क* (deductive reasoning) द्वारा सिद्ध करने की विधि आरम्भ की। इस विधि में, कुछ स्पष्ट तथ्यों को, बिना प्रमाण के, *अभिगृहीत* या *स्वयं सिद्ध* (axioms) मान लिया जाता है और फिर अन्य पूर्व प्रमाणित तथ्यों के आधार पर, प्रत्येक नये तथ्य को सिद्ध किया जाता है। यूक्लिड का ज्यामिति पर किया गया यह विशाल कार्य, *'एलीमेन्ट्स'* (Elements) नामक ग्रंथ के तेरह खंडों में प्रकाशित है।

भारत के ज्यामितिविदों में, हमें *ब्रह्मगुप्त (जन्म 598 ई०)* का उल्लेख, जिन्होंने चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसकी भुजाओं और अर्द्धपरिमाप के रूप में ज्ञात किया, *भास्कर II (जन्म 1114 ई०)* का जिन्होंने पाइथागोरस प्रमेय की उपपत्ति विच्छेदन विधि द्वारा दी और *आर्यभट्ट (जन्म 476 ई०)* का जिन्होंने समद्विबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का तथा *पिरैमिड (Pyramid)* के आयतन का परिकलन किया और पिरैमिड का निकटतम सन्निकट मान प्राप्त किया यहाँ उल्लेख कर देना आवश्यक है।

8.2 ज्यामिति के अध्ययन का महत्व

एक तल में बिन्दुओं, रेखाओं, कोणों, त्रिभुजों और अन्य आकृतियों के सम्बन्ध में बहुत से तथ्य आपने पहले ही अपने प्रयोगात्मक कार्य के द्वारा अनुभव किये हैं। उदाहरण के लिए, आप जाननते हैं कि:

1. एक तल में दो भिन्न रेखाएं या तो समांतर होती हैं, या केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।
2. यदि दो समांतर रेखाएं, एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित हों, तो संगत कोण बराबर होते हैं।
3. त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल दो समकोण होता है।

आप ने उन स्थितियों का भी अध्ययन किया है, जिन में दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इन के अतिरिक्त, समांतरचतुर्भुजों, आयतों और उनके क्षेत्रफल सम्बंधी कुछ तथ्यों से भी आप परिचित हैं।

आपने अपने प्रयोगात्मक कार्य द्वारा, ऐसे कुछ तथ्यों की जानकारी प्राप्त की है, जिनके महत्व के बारे में, आप को यथार्थ से अवगत कराना वांछनीय होगा।

सब से पहले, यह बताना आवश्यक है कि आप को इन सभी तथ्यों की जानकारी होना आवश्यक क्यों है। अपने भावी जीवन में, आप में से बहुतों को, ऐसी स्थितियों का सामना करना पड़ सकता है जिन में ज्यामिति का ज्ञान बहुत उपयोगी ही नहीं, बल्कि अनिवार्य होगा। उदाहरण के लिए, आप में से इंजीनियर, तकनीकीविद और वैज्ञानिक बनेंगे। वे अनुभव करेंगे कि यह सभी जानकारी उनके लिए उपयोगी ही नहीं अपितु अपरिहार्य है।

दूसरी बात समझने की यह है कि अभी तक जिन तथ्यों का अनुभव आपने किया है उन्हें केवल आकृतियां बनाकर और रेखाखंड तथा कोण आदि माप कर ही किया है। निस्संदेह, आप आकृतियां बनाने जैसे कार्य को सदैव नहीं कर सकते, क्योंकि नये नये तथ्यों की जांच करना और उन सब को याद रखना एक कठिन कार्य होगा। दूसरी ओर, आपका कार्य सरल हो जाएगा, यदि इन में से कुछ आधारभूत तथ्यों को सत्य मानकर, आप अन्य तथ्यों को उनसे तर्क द्वारा सिद्ध करना सीख लें। इन आधारभूत तथ्यों को, जिन को बिना प्रमाण के सत्य मान लेते हैं, *अभिगृहीत* (axioms) कहते हैं। कई बार अभिगृहीत अंतर्ज्ञान द्वारा स्पष्ट होते हैं।

एक गुणधर्म अथवा परिणाम को तभी सत्य मान लेंगे यदि इन अभिगृहीतों पर आधारित तर्क से हम उस का निगमन कर सकें। इस प्रक्रिया को, *'गुणधर्मों या परिणामों का सिद्ध करना'* कहते हैं और इस प्रकार सिद्ध किए गए परिणामों को *'प्रमेय'* कहते हैं।

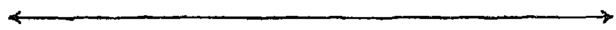
अब आप ज्यामिति के इन प्रमेयों को सिद्ध करना सीखेंगे। आगे के अध्यायों में, हम इस बात का प्रयत्न करेंगे कि इन प्रमेयों और उनके प्रमाणों को एक स्वाभाविक और तर्क संगत क्रम में प्रस्तुत करें जिससे आप उन्हें अधिक अच्छा समझ सकें और उनकी विशेषता का अनुभव कर सकें।

8.3 बिन्दु, रेखा और समतल

रेखागणित में तीन मौलिक संकल्पनाएँ हैं। ये हैं, *बिन्दु,* (point) *रेखा* (line) और *समतल* (plane)। हम इन तीन संकल्पनाओं की परिभाषा देने का प्रयत्न नहीं करेंगे क्योंकि इन्हें ठीक-ठीक से परिभाषित करना सम्भव नहीं है। किन्तु उदाहरणों की सहायता से इन संकल्पनाओं को हम समझ सकते हैं। कागज़ के एक पन्ने पर, बारीक पैंसिल द्वारा लगाया गया सूक्ष्म चिह्न, रेखागणित के *'बिन्दु'* से बहुत ही मिलता जुलता है। जितनी अधिक बारीक पैंसिल होगी, उतना ही यह चिह्न रेखागणित के बिन्दु के अधिक अनुरूप होगा।

किसी चिकनी (smooth) दीवार की सतह, कागज़ के एक पन्ने की सतह अथवा चिकने ब्लैक बोर्ड की सतह ज्यामिति के एक *'समतल'* के मिलते जुलते उदाहरण हैं। किन्तु ब्लैक बोर्ड की सतह और दीवार की सतह अथवा कागज़ के पन्ने की सतह सीमित है, परन्तु ज्यामिति का तल दिशाओं में अनन्ततः फैला है।

आप ने बहुत बार अपनी कापी के एक पृष्ठ पर, रूलर और पैंसिल की सहायता से रेखाएं खींची हैं। कापी के एक पृष्ठ पर, बारीक पैंसिल और रूलर द्वारा खींची गई रेखा, ज्यामिति की *'सरल रेखा'* (straight line) का एक बहुत मिलता जुलता उदाहरण है। संक्षेप में हम, 'सरल रेखा' के स्थान पर केवल शब्द *'रेखा'* का प्रयोग करेंगे। ज्यामिति की 'रेखा' दोनों ओर अनन्ततः चली गई है। इस बात का महत्व दिखाने के लिए हम कापी के पृष्ठ पर या ब्लैक बोर्ड पर खींची गई रेखा के दोनों सिरों पर, एक तीर का संकेत बना देते हैं; जैसा कि नीचे की आकृति में दिखाया गया है:



आकृति 8.1

बिन्दु, रेखा और समतल के यथार्थ उदाहरण प्रकृति या संसार में पाना सम्भव नहीं। ज्यामिति के 'बिन्दु', 'रेखा' और 'समतल' आदर्श *संकल्पनाएं* हैं। व्यावहारिक उद्देश्य से, इन संकल्पनाओं से काफी मिलते जुलते उदाहरणों का प्रयोग करना पर्याप्त होगा।

एक समतल भी बिन्दुओं का एक समुच्चय है। हम केवल उस समतल को ही लेंगे जिसको यूनानी गणितज्ञ यूक्लिड (Euclid) के नाम पर यूक्लिडियन समतल (Euclidean plane) कहा जाता है। इस पुस्तक में जिन रेखाओं का वर्णन होगा वे सभी विचाराधीन तल के उपसमुच्चय होंगे। अन्य आकृतियां भी जिन का वर्णन इस पुस्तक में किया गया है, बिन्दुओं के समुच्चय हैं। ज्यामिति में हमारा अधिक संबंध इन समुच्चयों के गुणधर्मों से होता है न कि इन संकल्पनाओं के यथातथ उदाहरण ज्ञात करने से।

हमने ऊपर बताया है कि समतल, बिन्दुओं का एक समुच्चय है और रेखा भी बिन्दुओं का एक समुच्चय है। परन्तु, ये केवल समुच्चय मात्र नहीं हैं। ये बिन्दुओं के विशेष समुच्चय हैं जिनके कुछ विशेष गुणधर्म हैं। आप इन गुणधर्मों से धीरे-धीरे परिचित हो जाओगे।

संकेतन : हम बिन्दुओं को अंग्रेज़ी वर्णमाला के बड़े अक्षरों, जैसे: $A, B, C, P, Q, R, X, Y, Z,$ इत्यादि से प्रकट करेंगे। हम रेखाओं को अंग्रेज़ी वर्णमाला के छोटे अक्षरों जैसे: $l, m, n, p, q, r,$ इत्यादि से प्रकट करेंगे।

8.4 बिन्दु और रेखाएं : आपतन गुणधर्म

यदि एक रेखा l और एक बिन्दु P दिये हों और $P \in l$ अर्थात् P रेखा l का एक अवयव हो तो हम कहते हैं:

P रेखा l *पर (स्थित)* है या P रेखा l पर *आपाती* है या रेखा l बिन्दु P को आविष्ट करती है या रेखा l, बिन्दु P से होकर जाती है।

इस से पहले कि हम बिन्दुओं और रेखाओं के *आपतन सम्बन्ध* के गुणधर्मों (properties of incidence) का संक्षेप में वर्णन करें, हम चाहेंगे कि आप अपने अनुभव के आधार पर निम्नलिखित

प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयत्न करें:

1. यदि एक बिन्दु P दिया हुआ हो, तो क्या कोई ऐसी रेखा है जो P से होकर जाती हो?
   ऐसी कितनी रेखाएं हो सकती हैं?
2. यदि दो भिन्न बिन्दु A और B दिये हुए हों, तो क्या कोई ऐसी रेखा है जो A और B दोनों से होकर जाती हो?
   ऐसी कितनी रेखाएं हो सकती हैं?
3. यदि एक रेखा l दी हुई हो, तो क्या कोई ऐसा बिन्दु है जो l पर हो?
   ऐसे कितने बिन्दु हैं?
4. यदि दो भिन्न रेखाए l और m दी हुई हों, तो क्या कोई ऐसा बिन्दु है जो l और m दोनों पर हो?
   ऐसे कितने बिन्दु हैं?

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं, ज्यामिति के कुछ कथनों को हमें अभिगृहीत के रूप में ग्रहण करना होता है। अतः हम निम्नलिखित तथ्यों को अभिगृहीत मान लेते हैं:

आपतन अभिगृहीत 8.1 : एक रेखा पर अनन्त बिन्दु होते हैं।
आपतन अभिगृहीत 8.2 : एक बिन्दु से होकर अनन्त रेखाएं जाती हैं।
आपतन अभिगृहीत 8.3 : यदि A और B दो भिन्न बिन्दु हों, तो एक और केवल एक ही रेखा होती है जो दोनों बिन्दुओं को आविष्ट करती है।

ऊपर के अन्तिम अभिगृहीत से उस स्थिति में एक रेखा पूरी तरह से ज्ञात हो जाती है, जबकि उसके दो भिन्न बिन्दुओं की स्थिति का ज्ञान हो। इस कारण बिन्दुओं A और B से होकर जाने वाली रेखा को संकेत $\overleftrightarrow{AB}$ या **रेखा AB** से प्रकट करते हैं।

> **टिप्पणी** : अभिगृहीत 8.3 के अनुसार समतल के दो भिन्न बिन्दु एक अद्वितीय रेखा को पूर्णतः निर्धारित करते हैं। अतः दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा पूर्णतः समतल में स्थित होती है, यह दर्शाता है कि समतल 'एकसा' (flat) है। यही कारण है कि हमने समतल के उदाहरण देते समय 'चिकने' शब्द का प्रयोग किया था।

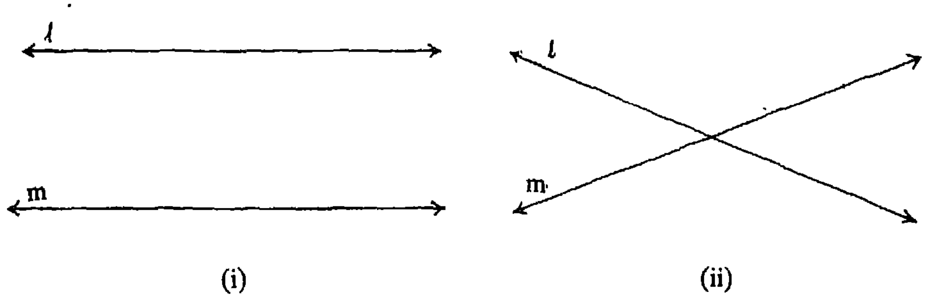
परिभाषा : *तीन या तीन से अधिक बिन्दुओं को संरेख (collinear) कहते हैं, यदि एक ऐसी रेखा हो, जो उन सभी बिन्दुओं को आविष्ट करती हो।*

परिभाषा : *तीन या तीन से अधिक रेखाओं को संगामी (concurrent) कहते हैं यदि एक ऐसा बिन्दु हो जो उन सभी रेखाओं पर हो।*

समांतर रेखाएं, प्रतिच्छेदी रेखाएं

आइए पहले उल्लेख किए गए निम्नलिखित चौथे प्रश्न की ओर ध्यान दें:

'यदि दो भिन्न-भिन्न रेखाएं l और m दी हों, तो क्या कोई ऐसा बिन्दु है, जो l और m दोनों पर हो? ऐसे कितने बिन्दु होते हैं?'



आकृति 8.2

अपने अनुभव से हमें ज्ञात है कि दो रेखाओं l और m का एक उभयनिष्ठ बिन्दु हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता। वास्तव में प्रश्न अब यह हो जाता है कि क्या इन भिन्न रेखाओं के एक से अधिक उभयनिष्ठ बिन्दु हो सकते हैं? हम जानते हैं, कि आप का उत्तर निश्चित ही 'नहीं' होगा। अब यह देखिए कि क्या आप अपने उत्तर की पुष्टि कर सकते हैं? इसके लिए आप को यह दिखाना है कि दो रेखाओं का एक से अधिक उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं होगा।

यदि हम यह मान लें कि इन दो रेखाओं के दो बिंदु उभयनिष्ठ हैं, तो क्या होगा? इससे हम एक अंतर्विरोध का निगमन करेंगे, अर्थात् एक कथन जो सत्य भी है और नहीं भी, अथवा ऐसा कथन जो किसी सत्य कथन का निषेध कथन हो। और वस्तुतः यही, आप के उत्तर की उपपत्ति होगी।

प्रमेय 8.1

दो भिन्न रेखाओं का एक से अधिक उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं हो सकता।

दिया है : दो भिन्न रेखाएं l और m

सिद्ध करना है : $l \cap m$ अधिक से अधिक एक बिन्दु आविष्ट करता है।

उपपत्ति : मान लीजिए $l \cap m$ दो भिन्न बिन्दुओं P और Q को आविष्ट करता है।
तब रेखा l दो बिन्दुओं P और Q को आविष्ट करती है। और
रेखा m भी इन्हीं दो बिन्दुओं P और Q को आविष्ट करती है।
अतः अभिगृहीत 3 से $l = m$

यह तो एक अंतर्विरोध है, क्योंकि हमने माना है कि l, m दो भिन्न रेखाएं हैं।
अतएव हमारी कल्पना असत्य थी।
अतः $l \cap m$ अधिक से अधिक एक बिन्दु आविष्ट करता है।

परिभाषा : *दो ऐसी रेखाओं को जिनका सर्वनिष्ठ अरिक्त (non-empty) हो, प्रतिच्छेदी रेखाएं कहते हैं। उनके उभयनिष्ठ बिन्दु को उनका प्रतिच्छेद बिन्दु कहते हैं।*

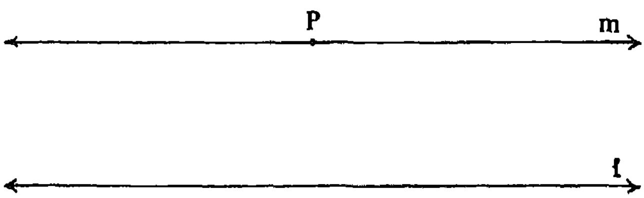
परिभाषा : *एक समतल की दो रेखाओं को अर्थात् दो एक समतलीय रेखाओं को जिन का सर्वनिष्ठ रिक्त हो, समांतर रेखाएं कहते हैं।*

समांतर अभिगृहीत (Parallel Axiom)

आप जान गये होंगे कि एक समतल की दो रेखाएं समांतर होंगी यदि वे प्रतिच्छेद न करें।

अब हम एक प्रश्न करते हैं कि वस्तुतः क्या समांतर रेखाएं होती हैं? मान लीजिए एक रेखा l और एक ऐसा बिन्दु P दिया हुआ है जो रेखा l पर नहीं है, तो क्या ऐसी रेखा खींचना सम्भव है जो P में से होकर जाये और l के समांतर हो? ऐसी कितनी रेखाएं खींच सकते हैं? अपने अनुभव से आप जानते हैं कि एक और केवल एक ही ऐसी रेखा है जो P से होकर जाती है और l के समांतर है। क्योंकि इस तथ्य को अन्य अभिगृहीतों से सिद्ध करना सम्भव नहीं है, इसलिए, इस तथ्य को हम एक नया अभिगृहीत मान लेते हैं।

अभिगृहीत 8.4 : यदि l एक रेखा हो और P एक बिन्दु हो, जो l पर न हो, तो एक और केवल एक ऐसी रेखा होती है जो P से होकर जाए और l के समांतर हो। (आकृति 8.3)



आकृति 8.3

टिप्पणी : समांतर अभिगृहीत में दो बातों पर विशेष बल दिया गया है।

(i) P से होकर एक रेखा जाती है जो दी हुई रेखा l के समांतर है।

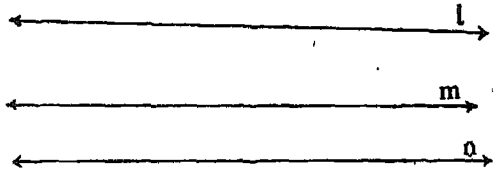
(ii) ऐसी केवल एक ही रेखा होती है।

दूसरे तथ्य (अद्वितीयता) का भी विवरण एक अन्य रूप से भी कर सकते हैं जिसे '*प्ले फेयर-अभिगृहीत*' (Playfair's axiom) कहते हैं। जो इस प्रकार है :

दो प्रतिच्छेदी रेखाओं में से दोनों एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकतीं।

प्रमेय 8.2

दो रेखाएं, जो एक ही रेखा के समांतर हों, परस्पर समांतर होती है।



आकृति 8.4

दिया है : एक समतल में ऐसी तीन रेखाएं l, m, n हैं कि $l \parallel m$ और $n \parallel m$

सिद्ध करना है : $l \parallel n$

उपपत्ति मान लीजिए l, n के समांतर नहीं है।

तब l, n एक अद्वितीय बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं।

क्योंकि $l \parallel m$ और P रेखा l पर है,

$\therefore$ P रेखा m पर नहीं है।

अत: रेखा m के बाहर स्थित एक बिन्दु P से होकर जाने वाली दो रेखाएं l और n हैं; और दोनों m के समांतर हैं।

यह असम्भव है। (समांतर अभिगृहीत)

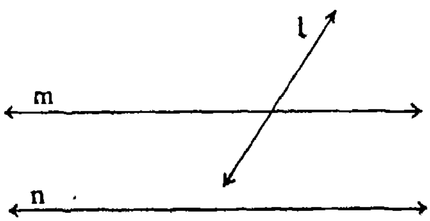
अतएव हमारी कल्पना असत्य है।

अत: $l \parallel n$

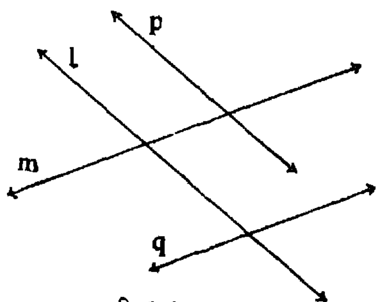
टिप्पणी : किसी भी रेखा को स्वयं उसके समांतर समझा जा सकता है। इस तथ्य को उपरोक्त प्रमेय के साथ मिलाने पर हम कह सकते हैं कि यदि $l \parallel m$ और $m \parallel n$, हो तो $l \parallel n$

प्रश्नावली 8.1

1. तीन रेखाएं l, m, n एक ही तल में हैं (आकृति 8.5)। यदि l, m को प्रतिच्छेद करे, और $n \parallel m$, तो दिखाइए कि l और n प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं।



आकृति 8.5



आकृति 8.6

2. आकृति 8.6 में, l और m दो प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं तथा $p \parallel l$ और $q \parallel m$। दिखाइए कि p और q भी प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं।
3. यदि रेखाएं AB, AC, AD और AE रेखा l के समांतर हों तो बिन्दुओं A, B, C, D और E के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

8.5 रेखा के उप-समुच्चय—लम्बाई और मध्यवर्तिता

परिभाषा : *यदि एक रेखा l पर दो भिन्न बिन्दु A और B दिए हों, तो रेखा के उस भाग को जिस के अंत्य बिन्दु A और B हैं, रेखाखण्ड AB कहते हैं।*



आकृति 8.7

हम बहुधा रेखाखण्ड AB को प्रतीक $\overline{AB}$ से प्रकट करते हैं।

परिभाषा : *एक बिन्दु P को रेखा खण्ड AB का आंतरिक बिन्दु* (interior point) *कहते हैं यदि $P \in AB$ हो पर P न तो A हो और न B अर्थात् $P \neq A$ और $P \neq B$*

टिप्पणी : यदि दो भिन्न बिन्दु A और B दिये हों तो एक अद्वितीय रेखा होती है जो A और B दोनों को आविष्ट करती है। इसलिए, इसका रेखाखण्ड AB जिस के अंत्य बिन्दु A और B हैं, पूर्ण रूप से इस रेखा को निर्धारित करता है। अतः जब हम रेखाखण्ड AB या AB लिखते हैं, तो रेखा को अलग से लिखने की आवश्यकता नहीं होती। कभी-कभी रेखाखण्ड $\overline{AB}$ को केवल संकेत AB से प्रकट करते हैं जबकि संदर्भ से ही अर्थ स्पष्ट हो जाता हो।

ध्यान दीजिए कि $\overline{AB}$ और $\overline{BA}$ एक ही रेखा खण्ड को प्रकट करते हैं, क्योंकि दोनों ही समान बिन्दु समुच्चय को दर्शाते हैं।

रेखाखण्डों की सर्वांगसमता

यदि दो रेखाखण्ड दिये हुए हों, तो उनमें से एक रेखाखण्ड, दूसरे रेखाखण्ड से बड़ा या छोटा हो सकता है। यह भी हो सकता है कि वे दोनों समान आमाप (size) के हों। जब यह स्थिति हो तो हम कहते हैं कि वे रेखाखण्ड *सर्वांगसम* (congruent) हैं। *सर्वांगसमता* की संकल्पना का वर्णन इस प्रकार कर सकते हैं:

दो रेखा खण्ड AB और CD सर्वांगसम होते हैं यदि एक रेखाखण्ड की ट्रेस कापी को दूसरे रेखा खण्ड पर अध्यारोपित करने पर वह उसे पूर्ण रूप से ठीक-ठीक ढक ले।

संकेतन : यदि रेखाखण्ड AB, रेखाखण्ड CD के सर्वांगसम हो तो हम लिखते हैं :

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ या रेखाखण्ड } AB \cong \text{ रेखाखण्ड } CD \text{ या } AB \cong CD$$

सभी रेखाखण्डों के समुच्चय में सर्वांगसमता सम्बंध

अध्यारोपण की रीति से हम सर्वांगसमता को समझ सकते हैं और सर्वांगसम रेखाखण्डों के निम्नलिखित गुणधर्मों को निर्धारित कर सकते हैं।

(i) यदि $AB \cong CD$ तो $CD \cong AB$

(ii) यदि $AB \cong CD$ और $CD \cong EF$ तो $AB \cong EF$

(iii) $AB \cong AB$

रेखाखण्ड की लम्बाई

हम रेखाखण्ड की लम्बाई ज्ञात करने के लिए एक अंशांकित रूलर या टेप का प्रयोग करते हैं। अपने अनुभव के आधार पर, आप रेखाखण्ड की लम्बाई के आधारभूत तथ्यों का संक्षेप में इस प्रकार वर्णन कर सकते हैं:

I रेखाखण्ड लम्बाई अभिगृहीत

प्रत्येक रेखाखण्ड की लम्बाई होती है। रेखाखण्ड की लम्बाई को, मीटर या उसके भागों में मापते हैं, जहां *मीटर* एक मानक रेखाखण्ड की लम्बाई है।

प्रत्येक रेखाखण्ड की लम्बाई (मीटरों में) एक धन वास्तविक संख्या होती है।

संकेतन : यदि रेखाखण्ड AB की लम्बाई r मीटर हो, तो हम लिखते हैं :

$$l(AB) = r \text{ मी} \quad \text{या } AB = r \text{ मी}$$

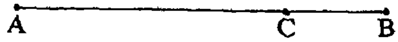
II सर्वांगसम रेखाखण्ड लम्बाई अभिगृहीत

दो सर्वांगसम रेखाखण्डों की लम्बाई बराबर होती है और विलोमतः दो रेखाखण्ड, जिनकी लम्बाई बराबर हो, सर्वांगसम होते हैं।

III रेखाखण्ड योग अभिगृहीत

यदि C, रेखाखण्ड AB का आंतरिक बिन्दु हो, तो

$l(AB) = l(AC) + l(CB)$ (देखिए आकृति 8.8)



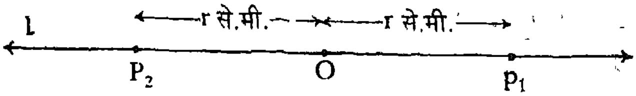
आकृति 8.8

यह लम्बाई माप का एक गुणधर्म है जिस का प्रयोग हम रूलर को अंशांकित करने में करते हैं।

IV रेखाखण्ड रचना अभिगृहीत

यदि रेखा l पर एक बिन्दु O दिया हुआ है और एक धन वास्तविक संख्या r दी हुई है, तो रेखा l पर हम O के दोनों ओर ऐसे दो बिन्दु P_1, P_2 ले सकते हैं (आकृति 8.9) जिससे कि

$$l(OP_1) = l(OP_2) = r \text{ सेमी}$$



आकृति 8.9

टिप्पणी : ज्यामिति में प्रयोगात्मक कार्य के लिए, हम मीटर के स्थान पर, सेंटीमीटर का प्रयोग लम्बाई की इकाई मान कर करेंगे। सेंटीमीटर, एक मीटर का सौवां भाग होता है।

दूरी

परिभाषा : (दो बिन्दुओं के बीच की दूरी) : *दो बिन्दुओं P और Q के बीच की दूरी, उन को जोड़ने वाले रेखाखण्ड की लम्बाई होती है।*

हम P और Q के बीच की दूरी को प्रतीक $d(P, Q)$ या PQ से प्रकट करेंगे।

परिभाषा से यह स्पष्ट है कि $d(P, Q) \geq 0$ तथा $d(P, Q) = d(Q, P)$, और $d(P, Q) = 0$ होता है यदि और केवल यदि $P = Q$ हो।

मध्यवर्तिता (Betweenness)

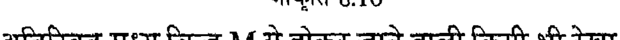
परिभाषा : (मध्यवर्तिता) : *एक बिन्दु C को दो बिन्दुओं A और B के बीच स्थित (का मध्यवर्ती) कहते हैं, यदि*

(i) A, B और C संरेख हों, और

(ii) $AC + CB = AB$

रेखाखण्ड का समद्विभाजक, मध्य बिन्दु

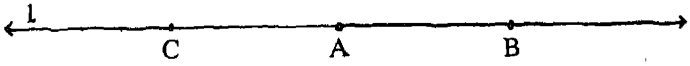
परिभाषा : *बिन्दु M को दिए हुए रेखाखण्ड AB का मध्य बिन्दु कहते हैं, यदि M, रेखाखण्ड AB का आंतरिक बिन्दु हो और $AM = MB$ (आकृति 8.10)*



आकृति 8.10

रेखा AB के अतिरिक्त मध्य बिन्दु M से होकर जाने वाली किसी भी रेखा को रेखाखण्ड AB का *समद्विभाजक (bisector) कहते हैं।*

किरण, अर्ध रेखा, रेखा पृथक करण



आकृति 8.11

परिभाषा : किरण (Ray) : *मान लीजिए रेखा l पर दो भिन्न बिन्दु A और B हैं। जैसा कि ज्ञात है रेखा l अंतहीन है। रेखा l के उस भाग को लीजिए जिसका केवल एक अंत्य बिन्दु A है और जो बिन्दु B को आविष्ट करता हो। रेखा l के इस भाग को एक किरण कहते हैं; और इसे किरण AB लिखते हैं (आकृति 8.11) और प्रतीक $\overrightarrow{AB}$ से प्रकट करते हैं।*

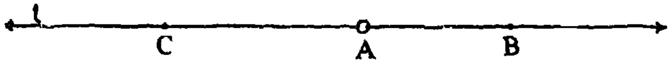
ध्यान दीजिए कि किरण AB का प्रत्येक बिन्दु P ऐसा है कि P या तो A के साथ या B के साथ संपाती होता है या P, A और B के मध्यस्थ है या B, A और P के मध्यस्थ है।

दो बिन्दु P और Q, बिन्दु A *के एक ही ओर* स्थित कहे जाते हैं, यदि , A, P, Q संरेख हों और Q, किरण AP पर हो।

यदि रेखा l पर बिन्दु C ऐसा हो कि C, किरण AB का बिन्दु न हो तो AC, एक ऐसी किरण है जो बिन्दु B को आविष्ट नहीं करती।

दो किरणें AB और AC, *विपरीत किरणें कहलाती हैं यदि वे संरेख हों और उन का सर्वनिष्ठ केवल $\{A\}$ हो, अर्थात् केवल बिन्दु A ही दोनों किरणों का उभयनिष्ठ बिन्दु हो।*

परिभाषा : *यदि A, B, C रेखा l पर ऐसे तीन बिन्दु हों कि A, B और C के बीच हो और रेखा l पर से बिन्दु A को हटा दें तो रेखा के जो दो भाग बच रहते हैं, उनमें से प्रत्येक को एक अर्धरेखा (half line)* कहते हैं। (आकृति 8.12)



आकृति 8.12

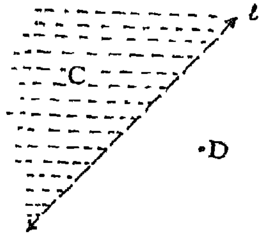
ध्यान दीजिए कि अर्धरेखा AB और किरण AB में केवल यह अन्तर है कि बिन्दु A किरण AB का सदस्य होता है, परन्तु यह बिन्दु अर्धरेखा AB का सदस्य नहीं होता।

तीन समुच्चयों, $\{A\}$, अर्धरेखा AB, और अर्धरेखा AC में से कोई भी दो समुच्चय असंयुक्त समुच्चय हैं और तीनों समुच्चयों का सम्मिलन स्वयं रेखा l ही है।

परिभाषा : *दो किरण या दो रेखाखण्ड या एक रेखाखण्ड और एक किरण, समांतर कहलाते हैं यदि उन को आविष्ट करने वाली रेखाएं समांतर हों।*

8.6 अर्ध समतल (Half-Plane), समतल पृथक्करण

परिभाषा : (**अर्ध समतल**) : *यदि समतल α में एक रेखा l दी हुई हो, तो समतल α के सभी बिन्दु, जो रेखा l पर नहीं हैं, समतल के दो असंयुक्त (disjoint) उप समुच्चय बनाते हैं। इन में से प्रत्येक भाग को अर्ध समतल कहते हैं। रेखा l, दोनों अर्धसमतलों में से प्रत्येक का कोर है।* (आकृति 8.13)



आकृति 8.13

दोनों अर्ध समतलों में अंतर रखने के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि प्रत्येक के बारे में एक-एक बात और बता दी जाए।

संकेतन : रेखा l से बने उस अर्ध समतल को, जिस में बिन्दु C आविष्ट है, प्रतीक $h(l, C)$ से प्रकट करते हैं।

ध्यान दीजिए कि अर्ध समतल $h(l, C)$ में रेखा l का कोई भी बिन्दु आविष्ट नहीं है।

परिभाषा : *दो बिन्दु P और Q, रेखा l के एक ही ओर स्थित कहे जाते हैं, यदि P, Q दोनों रेखा l द्वारा निर्धारित एक ही अर्ध समतल में हों।*

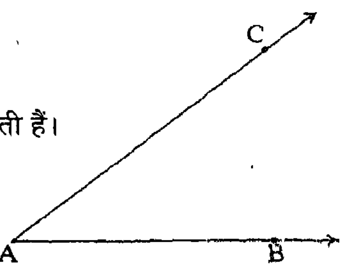
दो बिन्दु P और Q, रेखा l *के विपरीत ओर* स्थित कहे जाते हैं, यदि रेखा l द्वारा निर्धारित अर्ध समतलों में से, P एक में हो और Q दूसरे में।

8.7 कोण (Angle)

कोण वह आकृति है जिसे एक ही आदि बिन्दु वाली दो किरणें बनाती हैं।

परिभाषा : *एक ही आदि बिन्दु वाली दो असंरेख किरणों के सम्मिलन को कोण कहते हैं।*

उन दो किरणों को जो कोण बनाती हैं, *कोण की भुजाएँ (arms)* कहते हैं, और उभयनिष्ठ आदि बिन्दु को, *कोण का शीर्ष (vertex)* कहते हैं।



आकृति 8.14

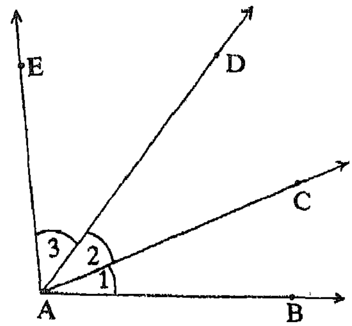
संकेतन : दो किरणों AB और AC से बनाए गए कोण को (आकृति 8.14) प्रतीक $\angle BAC$ या $\angle CAB$ से प्रकट करते हैं।

कई बार, सुविधा के लिए, $\angle BAC$ को केवल $\angle A$ से प्रकट करते हैं। परन्तु यह बात तब लागू नहीं होती जब शीर्ष A पर एक से अधिक कोण हों।

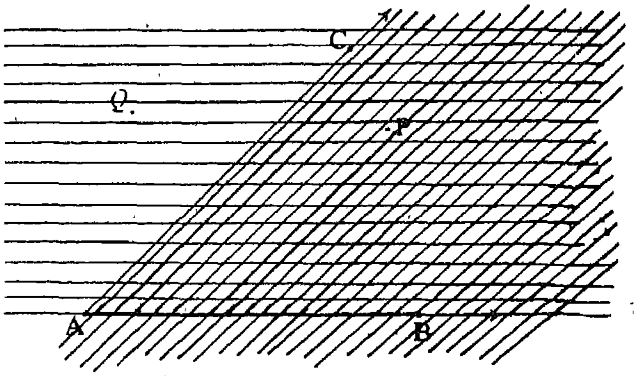
और कई बार, सुविधा के लिए ही, कोणों को $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ आदि जैसे प्रतीकों से भी प्रकट करते हैं जहाँ प्रतीक 1, 2, 3 आदि को आकृति में शीर्ष के निकट और उनकी दो भुजाओं के बीच में प्रदर्शित करते हैं (आकृति 8.15)।

कोण का अभ्यंतर (Interior)

यदि $\angle BAC$ दिया हो, तो यह समतल को दो भागों में बांट देता है। आकृति 8.16 में, बिन्दु P, इन में से एक भाग में है और बिन्दु Q दूसरे भाग में।



आकृति 8.15



आकृति 8.16

परिभाषा : (कोण का अभ्यंतर) : *कोण BAC का अभ्यंतर, समतल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है, जो रेखा AB के बिन्दु C की ओर, और रेखा AC के बिन्दु B की ओर, स्थित हों।*

परिभाषा : (कोण का बहिर्भाग) : *कोण BAC का बहिर्भाग समतल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जो न तो कोण BAC पर हों और न ही उसके अभ्यंतर में हों।*

ध्यान दीजिए कि $\angle BAC$, अभ्यंतर $\angle BAC$ और बहिर्भाग $\angle BAC$, तीन ऐसे समुच्चय हैं कि इनमें से प्रत्येक दो का सर्वनिष्ठ रिक्त समुच्चय है और तीनों का सम्मिलन पूरे समतल के बिन्दुओं का समुच्चय है।

कोण के अभ्यंतर का एक महत्वपूर्ण गुणधर्म है:

यदि P_1, P_2; $\angle BAC$ के अभ्यंतर में स्थित दो बिन्दु हों, तो रेखाखण्ड $P_1 P_2$, $\angle BAC$ के अभ्यंतर में आविष्ट होती है।

इसी कारण हम कहते हैं कि किसी कोण का अभ्यंतर बिन्दुओं का *अवमुख समुच्चय* (convex set) है।

सर्वांगसम कोण (congruent angles) : *दो कोण सर्वांगसम होते हैं यदि एक की ट्रेस कापी दूसरे कोण पर अध्यारोपण करने से, उसे पूर्ण रूप से ठीक-ठीक ढक ले।*

संकेतन : यदि $\angle BAC$ और $\angle FEG$ सर्वांगसम हों, तो हम लिखते हैं $\angle BAC \cong \angle FEG$

कोण का माप : किसी कोण का माप ज्ञात करने के लिए हम एक प्रोट्रैक्टर का प्रयोग ठीक उसी प्रकार करते हैं जैसे कि किसी रेखाखण्ड की लम्बाई ज्ञात करने के लिए अंशांकित रूलर (या टेप) का प्रयोग करते हैं। आप कोणों के माप से संबंधित मुख्य तथ्यों का संक्षेप में इस प्रकार वर्णन कर सकते हैं:

I. कोण माप अभिगृहीत : प्रत्येक कोण का एक माप होता है। एक मानक कोण के माप को, जिसे *अंश (degree)* कहते हैं, कोण माप का इकाई माना जाता है।

अंशों में प्रत्येक *कोण का माप* एक वास्तविक संख्या 0 और 180 के बीच की होती है।

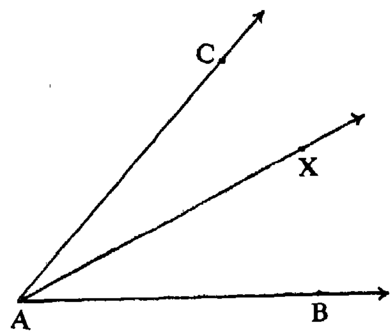
टिप्पणी : जब किसी कोण की दोनों किरणें विपरीत दिशा हों तो हम इसे एक सरल कोण या ऋजु कोण कहते हैं और इसका माप 180° होता है। जब कोण की दोनों किरणें संपाती हों, तो हम इसे शून्य कोण कहते हैं और इसका माप 0° होता है।

II सर्वांगसम कोण माप अभिगृहीत : दो सर्वांगसम कोणों का माप बराबर होता है और विलोमतः बराबर माप वाले दो कोण सर्वांगसम होते हैं।

संकेतन : यदि $\angle BAC$ का माप r अंश हो, तो हम $m\ \angle BAC = r°$ लिखते हैं।

> **टिप्पणी :** इस प्रकार, अब दो सर्वांगसम कोण समान कोण कहलायेंगे। प्रायः हम $m\,\angle BAC = r°$ के स्थान पर $\angle BAC = r°$ लिखते हैं। यदि $m\ \angle ABC > m\ \angle DEF$, तो हम $\angle ABC > \angle DEF$ लिखते हैं।

III कोण योग अभिगृहीत : यदि बिन्दु X, कोण $\angle BAC$ के अभ्यंतर में हो, (आकृति 8.17), तो
$m\ \angle BAC = m\ \angle BAX + \text{m}\ \angle XAC$



आकृति 8.17

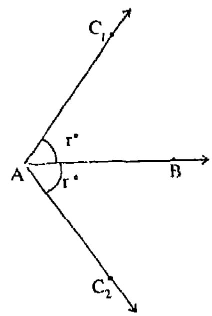
यह कोण माप का एक गुणधर्म है जिस का प्रयोग प्रोट्रैक्टर को अंशांकित करने के लिए किया जाता है।

IV कोण रचना अभिगृहीत : यदि किसी समतल में, एक किरण AB और एक वास्तविक संख्या r, $0 < r < 180$, दिये हुए हों, तो दो किरणों AC_1 और AC_2 की रचना हम इस प्रकार कर सकते हैं, (आकृति 8.18) कि C_1, C_2 रेखा AB के विपरीत ओर हों और $\angle BAC_1 = \angle BAC_2 = r^\circ$ हो।

कोणों के प्रकार : ऐसे कोण को, जिसका माप 90° हो, *समकोण* कहते हैं।

ऐसे कोण को, जिसका माप 90° से कम हो, *न्यूनकोण* कहते हैं।

ऐसे कोण को, जिसका माप 90° से अधिक हो, *अधिक कोण* कहते हैं।



आकृति 8.18

सम्पूरक कोण, पूरक कोण : यदि दो कोण के मापों का योगफल 180° हो, तो उन्हें *सम्पूरक कोण* कहते हैं। उदाहरण के लिए 72° और 108° माप वाले कोण सम्पूरक कोण हैं।

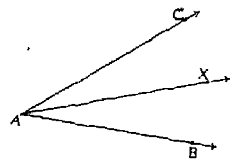
यदि दो कोण के मापों का योगफल 90° हो तो उन्हें *पूरक कोण* कहते हैं। उदाहरण के लिए 50° और 40°, माप वाले कोण पूरक कोण हैं।

कोण समद्विभाजक

परिभाषा : *यदि $\angle BAC$ दिया हुआ हो (आकृति 8.19), तो एक किरण AX को $\angle BAC$ का समद्विभाजक कहते हैं यदि बिन्दु X, $\angle BAC$ के अभ्यंतर में हो और $\angle BAX = \angle XAC$* हो।

इससे तुरंत यह पता चल जाता है कि यदि किरण AX, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है, तो

$$\angle BAX = \angle XAC = \frac{1}{2}\ \angle BAC$$



आकृति 8.19

प्रश्नावली 8.2

1. यदि B, बिन्दुओं A और C के बीच में हो और $AC = 10, BC = 6$, तो AB का मान ज्ञात कीजिए।
2. यदि दो बिन्दु A और B दिये हुए हों, तो इनसे कितने रेखाखण्ड निर्धारित होते हैं?
3. यदि A, B, C तीन संरेख बिन्दु हों, तो इन बिन्दुओं से कितने रेखाखण्ड निर्धारित होते हैं?
4. यदि दो बिन्दु A और B दिये हुए हों, तो निम्न क्या हैं?
   (i) $\overline{AB} \cup$ (किरण विपरीत $\overrightarrow{AB}$)
   (ii) $\overline{AB} \cap$ (किरण विपरीत $\overrightarrow{AB}$)

5. बिन्दु X, $\angle BAC$ के अभ्यंतर में है। यदि $\angle BAC = 70^\circ$ b'k $\angle BAX = 42^\circ$. तो $\angle XAC$ का माप क्या है?
6. निम्नलिखित माप वाले कोणों में से प्रत्येक के पूरक कोण का माप ज्ञात कीजिए:
   (i) 22° (ii) 63° (iii) 45° (iv) 75°
7. एक कोण का माप, अपने पूरक कोण के माप से 14° अधिक है। इस कोण का माप क्या है?
8. एक कोण का माप अपने सम्पूरक कोण के माप का दुगना है। इस कोण का माप बताइए।

अध्याय 9

कुछ कोण सम्बन्ध

9.1 प्रस्तावना

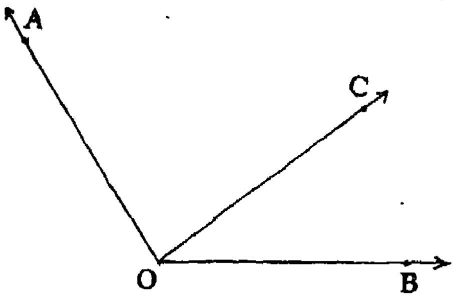
आप जानते हो कि *कोण* वह आकृति है जो उभयनिष्ठ आदि बिन्दु वाली दो किरणों से बनता है। व्यापक रूप में, एक आकृति में दो से अधिक किरणें या रेखाएं हो सकती हैं और इस प्रकार एक से अधिक कोण हो सकते हैं।

कुछ आकृतियों में, उनके कोणों में कुछ परस्पर सम्बन्ध हो सकता है; और किसी आकृति के कोणों के बीच के ऐसे सम्बन्धों का अध्ययन करना बड़ा ही रोचक होगा।

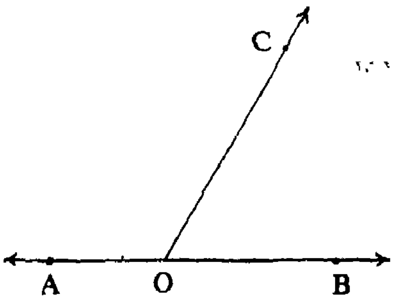
9.2 आसन्न कोण (adjacent angles) और कोणों का एक रैखिक युग्म(A linear pair of angles)

आसन्न कोण : आकृति 9.1 देखिए। आप देखेंगे कि तीन किरणें *OA, OB* और *OC* का एक ही आदि बिन्दु *O* है। ये तीन किरणें दो कोण $\angle AOC$ और $\angle COB$ बनाती हैं, आप इन दो कोणों में क्या देखते हैं? उनका उभयनिष्ठ शीर्ष *O* है और उनकी एक उभयनिष्ठ भुजा *OC* है। और उन की अन्य भुजाएँ *OA* और *OB*, रेखा *OC* की विपरीत दिशाओं में स्थित हैं। ऐसे कोणों को हम एक विशेष नाम देते हैं।

परिभाषा : *दो कोणों को आसन्न कोण कहते हैं, यदि*



आकृति 9.1



आकृति 9.2

(i) *उनका एक ही शीर्ष बिन्दु हो,*

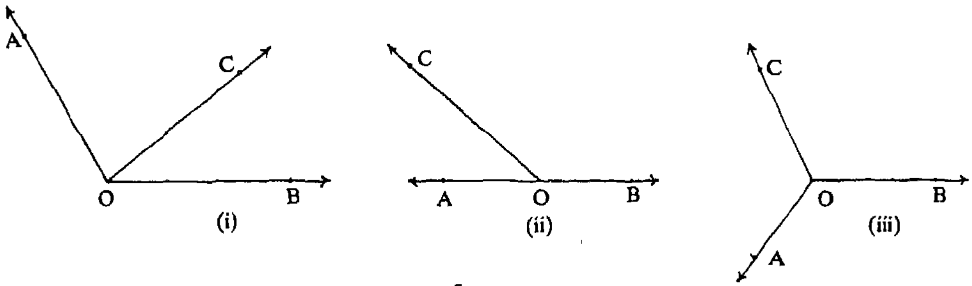
(ii) *उनकी एक उभयनिष्ठ भुजा हो, और*

(iii) एक कोण की दूसरी भुजा, उभयनिष्ठ भुजा के एक ओर हो, और दूसरे कोण की दूसरी भुजा उभयनिष्ठ भुजा के दूसरी ओर हो। (आकृति 9.1)

कोणों का रैखिक युग्म : आकृति 9.2 में, $\angle AOC$ और $\angle BOC$ निस्सन्देह दो आसन्न कोण हैं। कोणों की भुजाओं OA और OB को, जो उभयनिष्ठ नहीं है, देखने पर ज्ञात होगा कि OA, OB दो विपरीत किरणें हैं, या ये संरेख हैं। इन कोणों को भी एक विशेष नाम दिया गया है।

परिभाषा : *दो आसन्न कोणों को, जिन की भिन्न भुजाएं दो विपरीत किरणें हों, कोणों का रैखिक युग्म कहते हैं।*

अब नीचे की आकृतियों पर ध्यान दीजिए:



आकृति 9.3

इनमें से प्रत्येक आकृति में, $\angle AOC$ और $\angle COB$ दो आसन्न कोण हैं। आप माप कर आसानी से जांच कर सकते हैं कि आकृति 9.3 (i) में $\angle AOC + \angle COB < 180°$, आकृति 9.3 (iii) में $\angle AOC + \angle COB > 180°$, और आकृति 9.3 (ii) में $\angle AOC + \angle COB = 180°$ है। ध्यान दीजिए कि आकृति 9.3 (ii) में कोणों का एक रैखिक युग्म है, जब कि 9.3 (i) और 9.3 (iii) में, कोणों का रैखिक युग्म नहीं है।

इस प्रकार हमें दो आसन्न कोणों के बीच में एक महत्वपूर्ण सम्बन्ध प्राप्त होता है।

यदि दो आसन्न कोण $\angle AOC$ और $\angle BOC$ रैखिक युग्म बनाएं तो

$$\angle AOC + \angle COB = 180°$$

और यदि दो आसन्न कोण $\angle AOC$ और $\angle COB$, रैखिक युग्म न बनाएं, तो

$$\angle AOC + \angle COB \neq 180°$$

यह एक ज्यामितीय तथ्य है जिसकी हमने माप द्वारा जांच की है। इस ज्यामितीय तथ्य को पूर्व वर्णित अभिगृहीतों अथवा प्रमेयों द्वारा सिद्ध किया जा सकता है। अतः हम इस नए ज्यामितीय तथ्य को एक अभिगृहीत मान लेते हैं।

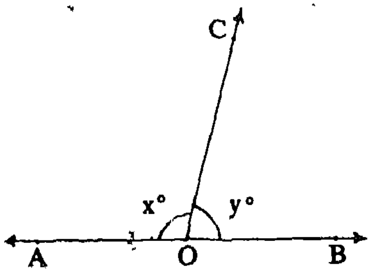
अभिगृहीत 9.1 (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

यदि एक किरण का सिरा, किसी रेखा पर स्थित हो, तो इस प्रकार बने दो आसन्न कोणों का योग 180° होता है। विलोमतः यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° हो, तो उन की उभयनिष्ठ भुजा को छोड़ कर अन्य भुजाएं विपरीत किरणें होती हैं।

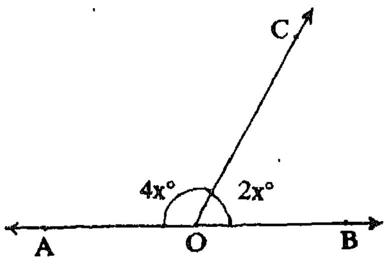
टिप्पणी : आपको याद होगा कि यदि दो कोणों का योगफल 180° हो तो उन्हें सम्पूरक कोण कहते हैं। इस परिभाषा का प्रयोग करके रैखिक युग्म अभिगृहीत का कथन इस प्रकार भी दे सकते हैं: *दो आसन्न कोण एक रैखिक कोण-युग्म होते हैं, यदि और केवल यदि वे सम्पूरक कोण हों।*

प्रश्नावली 9.1

1. आकृति 9.4 में, OA, OB दो विपरीत किरणें हैं।
   (i) यदि $y = 75$ हो, तो x का मान क्या है?
   (ii) यदि $x = 110$ हो, तो y का मान क्या है?

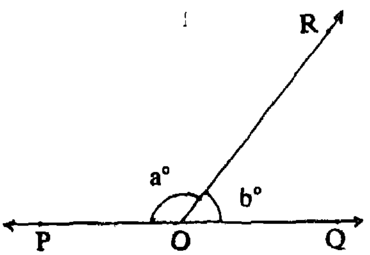


आकृति 9.4

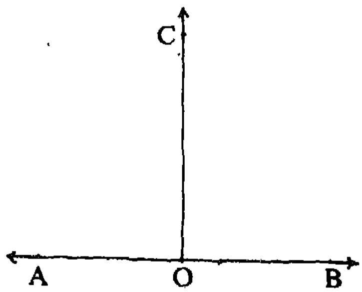


आकृति 9.5

2. आकृति 9.5 में, $\angle AOC$ और $\angle BOC$, एक रैखिक युग्म बनाते हैं। x का मान ज्ञात कीजिए।

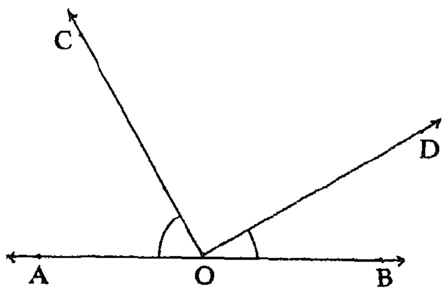


आकृति 9.6

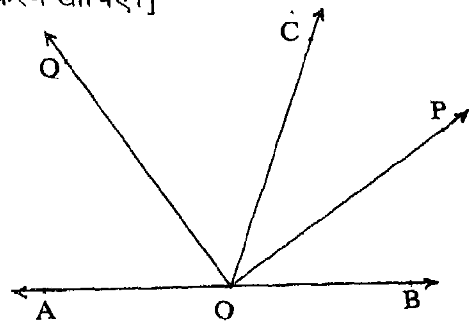


आकृति 9.7

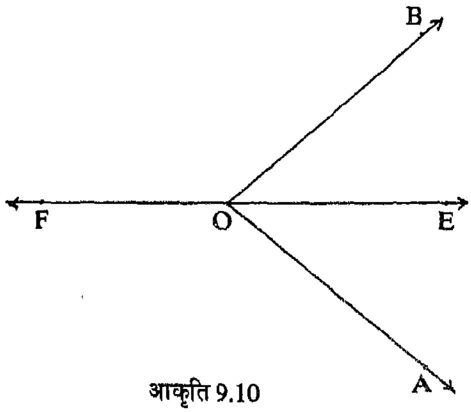
3. आकृति 9.6 में, $\angle POR$ और $\angle QOR$, एक रैखिक युग्म बनाते हैं। यदि $a - b = 80$ तो a और b का मान ज्ञात कीजिए।
4. यदि किरण OC, रेखा AB पर इस प्रकार खड़ी हो कि $\angle AOC = \angle COB$ (आकृति 9.7) तो दिखाइए कि $\angle AOC = 90°$ है।
5. आकृति 9.8 में, OA, OB दो विपरीत किरणें हैं और $\angle AOC + \angle BOD = 90°$, तो $\angle COD$ ज्ञात कीजिए।
6. आकृति 9.9 में, OP, $\angle BOC$ का समद्विभाजन करता है, और OQ, $\angle AOC$ का समद्विभाजन करता है, दिखाइए कि $\angle POQ = 90°$
7. किरण OE, $\angle AOB$ का समद्विभाजन करती है और किरण OF, OE के विपरीत है। (आकृति 9.10) दिखाइए कि $\angle FOB = \angle FOA$
8. किरणें OA, OB, OC, OD और OE का एक सर्वनिष्ठ अंत्य बिन्दु O है। (आकृति 9.11) दिखाइए कि $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 360°$
[**संकेत** : किरण OA के विपरीत एक किरण खींचिए।]



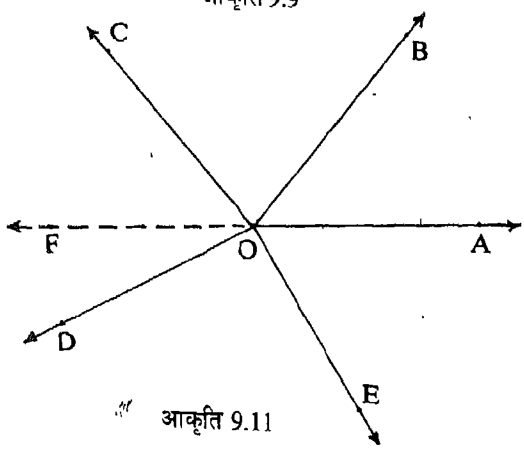
आकृति 9.8



आकृति 9.9

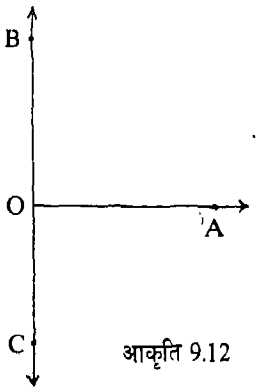


आकृति 9.10

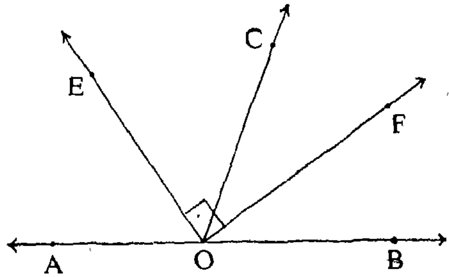


आकृति 9.11

9. दिया हुआ है कि $\angle AOC$ और $\angle AOB$ में से प्रत्येक एक समकोण है। (आकृति 9.12) दिखाइए कि BOC एक रेखा है।
10. आकृति 9.13 में OE, कोण AOC को समद्विभाजित करता है, OF, कोण COB को समद्विभाजित करता है और $OE \perp OF$।
दिखाइए कि बिन्दु A, O, B संरेख हैं।

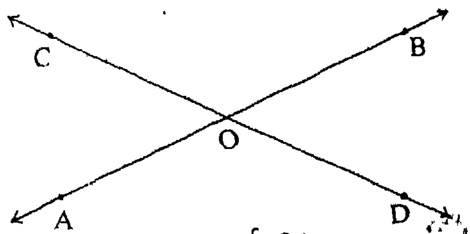


आकृति 9.12



आकृति 9.13

9.3 शीर्षाभिमुख कोण



आकृति 9.14

मान लीजिए दो रेखाएं AB और CD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं जिनसे चार कोण बनते हैं। $\angle AOC$ और $\angle BOD$, कोणों का एक युग्म है तथा $\angle AOD$ और $\angle BOC$, कोणों का दूसरा युग्म है।

$\angle AOC$ और $\angle BOD$ की भुजाओं पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि OA और OB दो विपरीत किरणें हैं, और इसी प्रकार OC और OD भी विपरीत किरणें हैं। ऐसे कोणों के लिए एक विशेष नाम दिया गया है।

परिभाषा : *दो कोणों को शीर्षाभिमुख कोण* (vertically opposite angles) *युग्म कहते हैं यदि उन की भुजाएं, विपरीत किरणों के दो युग्म बनाएं।*

इस प्रकार ऊपर की आकृति में, शीर्षाभिमुख कोणों के दो युग्म हैं:

(i) $\angle AOC$ और $\angle BOD$

(ii) $\angle COB$ और $\angle AOD$

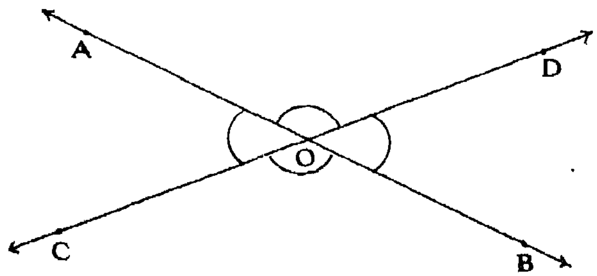
इन कोणों के प्रत्येक युग्म के कोणों के बीच के सम्बन्ध से आप पहले ही परिचित हो चुके हैं। यह कैसा सम्बन्ध है? इसे कैसे सिद्ध करेंगे?

आप देखते हैं कि $\angle AOC = \angle BOD$, यदि $\angle AOC + \angle COB = \angle BOD + COB$ हो। प्रत्येक पक्ष के कोणों का जोड़ क्या है? $180°$, क्यों? जिस सम्बन्ध का आप ने अभी अनुमान किया है, उसे हम प्रमेय के रूप में उल्लेख करेंगे और सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 9.1

यदि दो रेखाएं परस्पर प्रतिच्छेद करें तो शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं।

दिया है : रेखाएं AB और CD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। (आकृति 9.15)



आकृति 9.15

सिद्ध करना है : (i) $\angle AOC = \angle DOB$

(ii) $\angle BOC = \angle DOA$

उपपत्ति : $\because$ किरण OD, रेखा AB पर स्थित है

$\therefore \angle AOD + \angle DOB = 180^0$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत) ... (1)

$\because$ किरण OA, रेखा CD पर स्थित है

$\therefore \angle AOD + \angle AOC = 180^0$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत) ... (2)

(रैखिक युग्म अभिगृहीत) (1) और (2) से प्राप्त होता है

$\angle AOD + \angle DOB = \angle AOD + \angle AOC$

$\therefore \angle AOC = \angle DOB$ ... (3)

इसी प्रकार $\angle BOC = \angle DOA$ ... (4)

उदाहरण 9.1 यदि दो परस्पर प्रतिच्छेदी रेखाओं से बने कोणों में से एक समकोण हो तो चारों कोणों में से प्रत्येक कोण, समकोण होता है।

हल :

दिया है : रेखाएं l और m परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं और इनसे कोण 1,2, 3 और 4 बनते हैं। और $\angle 1 = 90°$ (आकृति 9.16)।

सिद्ध करना है : $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90°$

[*विश्लेषण :* यह दिखाने के लिए कि $\angle 2 = 90°$,
क्या हम $\angle 1$ का प्रयोग कर सकते हैं? हाँ!
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$. (क्यों?) अतः $\angle 2 = 90°$
अब, $\angle 3$ और $\angle 1$ शीर्षाभिमुख कोण हैं।]

उपपत्ति :

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

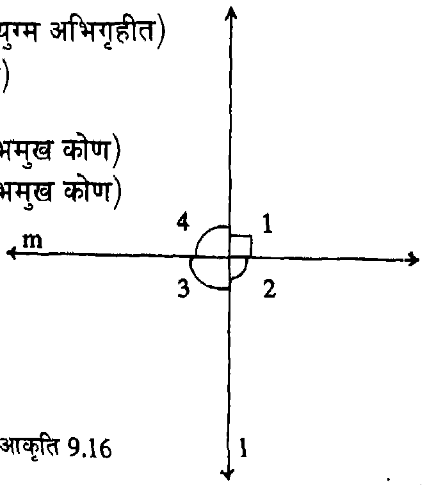
परन्तु $\angle 1 = 90°$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle 2 = 180° - 90°$

अब $\angle 3 = \angle 1 = 90°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle 4 = \angle 2 = 90°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90°$

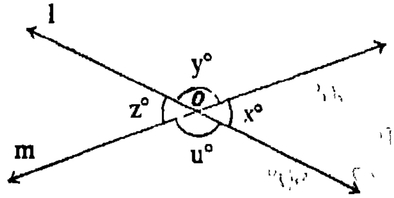


आकृति 9.16

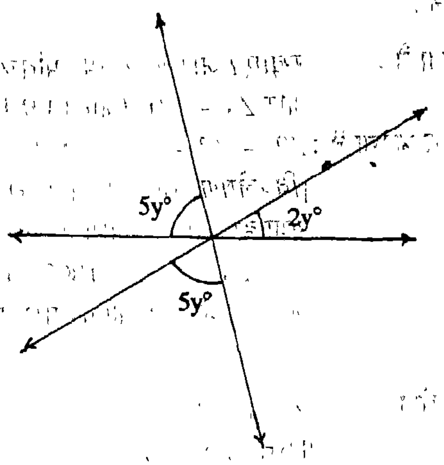
परिभाषा : *दो रेखाएं (किरणें या रेखाखण्ड) परस्पर लम्ब होती हैं यदि वे प्रतिच्छेद करें और एक समकोण बनाएं।*

प्रश्नावली 9.2

1. रेखाएं l और m, बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं और कोण बनाती हैं जैसा कि आकृति 9.17 में दिखाया गया है।
   यदि $x = 45$, तो y, z और u के मान बताइए।
2. आकृति 9.18 में, y का मान ज्ञात कीजिए।

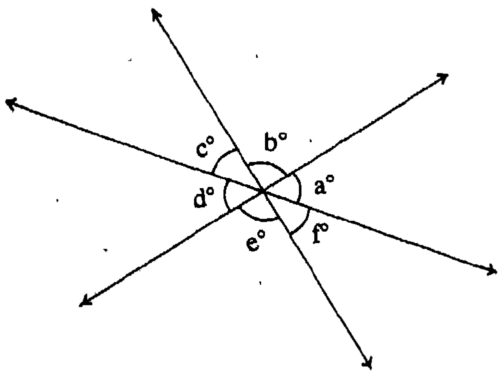


आकृति 9.17

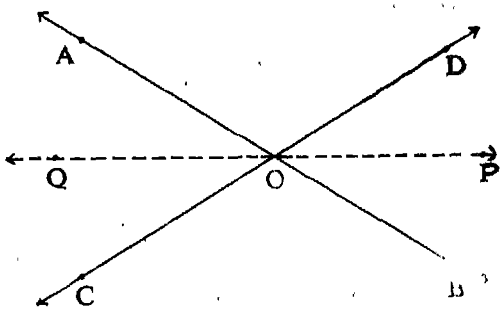


आकृति 9.18

3. आकृति 9.19 में, एक ही समतल में स्थित तीन रेखाएं एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं, और कुछ कोण बनाती हैं जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। यदि $a = 50$ और $b = 90$ दिया है तो c, d, e और f के मान ज्ञात कीजिए।
4. आकृति 9.20 में, OP और OQ, क्रमशः $\angle BOD$ और $\angle AOC$ के समद्विभाजक हैं। दिखाइए कि OP और OQ एक ही रेखा पर हैं।



आकृति 9.19



आकृति 9.20

9.4 दो रेखाओं के साथ तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोण

यदि एक रेखा दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करे, तो उसे उन *दी हुई रेखाओं की तिर्यक रेखा* (transversal) कहते हैं।

आकृति 9.21 में, AB और CD दो रेखाएं हैं और उन्हें एक तिर्यक रेखा LM बिन्दुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करती है। ये तीन रेखाएं, आठ कोण निर्धारित करती हैं; जिनमें से चार कोण बिन्दु P पर और शेष चार कोण बिन्दु Q पर हैं। आकृति में, इन कोणों की अपनी स्थितियों को देखते हुए इनमें से कुछ कोणों के युग्म बनाए जा सकते हैं।

निम्नलिखित कोण युग्मों को *संगत कोण युग्म* कहते हैं:

(क) $\angle 1$ और $\angle 5$ (ख) $\angle 4$ और $\angle 8$

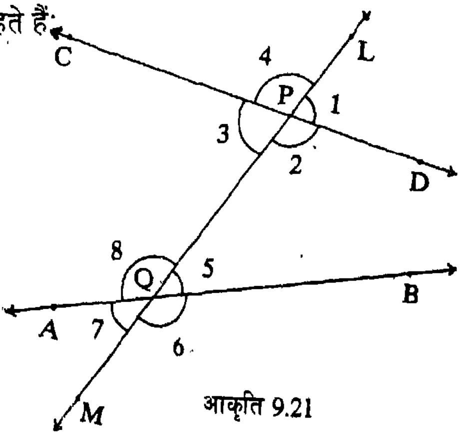
(ग) $\angle 2$ और $\angle 6$ (घ) $\angle 3$ और $\angle 7$

निम्नलिखित कोण युग्मों को *एकान्तर अन्त: कोण युग्म* कहते :

(क) $\angle 3$ और $\angle 5$ (ख) $\angle 2$ और $\angle 8$

निम्नलिखित कोण युग्मों को *क्रमागत अंत: कोण युग्म या तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्त: कोणों का युग्म* कहते हैं :

(क) $\angle 2$ और $\angle 5$ (ख) $\angle 3$ और $\angle 8$



आकृति 9.21

जब भी एक तिर्यक रेखा दो अन्य रेखाओं का प्रतिच्छेद करती है तो उनसे बने कुछ कोण युग्मों को हम पहचान सकते हैं और उनके विशेष नाम भी हम बता सकते हैं। सामान्यत: इन कोण-युग्मों के कोणों के बीच कोई संबंध नहीं होता। परन्तु, यदि रेखाएं समांतर हों, तो प्रत्येक कोण युग्म के कोणों के बीच कुछ बड़े ही उपयोगी संबंध होते हैं। आपको अपने पहले किए गए प्रयोगात्मक कार्य से याद होगा कि यदि एक तिर्यक रेखा, दो समांतर रेखाओं को काटती है तो

(i) *संगत कोण बराबर होते हैं,*

(ii) *एकान्तर अंत: कोण बराबर होते हैं, तथा*

(iii) *क्रमागत अंत: कोण संपूरक होते हैं।*

उपरोक्त प्रकथनों के विलोम आसानी से दिए जा सकते हैं। वास्तव में, आप जब रूलर और सैट स्क्वेयर द्वारा, एक रेखा के समांतर दूसरी रेखा खींचते हैं, तो विलोम कथन का ही प्रयोग करते हैं।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि इन कोणों के बीच बड़े ही रोचक और उपयोगी संबंध होते हैं। क्या हम उन्हें सिद्ध कर सकते हैं? नहीं, क्योंकि दो समांतर रेखाओं की स्थिति पहली बार हमारे सम्मुख आयी है,

इससे पूर्व हम केवल प्रतिच्छेदी रेखाओं पर ही विचार कर रहे थे। अतः इसके लिए हमें एक नए अभिगृहीत की आवश्यकता होती है। हम निम्नलिखित अभिगृहीत ले सकते हैं।

अभिगृहीत 9.2 [संगत कोण अभिगृहीत]

यदि एक तिर्यक रेखा, दो समांतर रेखाओं को काटे तो संगत कोण समान होते हैं। विलोमतः यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस तरह काटे कि संगत कोण समान हों, तो दोनों रेखाएं समांतर होती हैं।

अब हम, समांतर रेखाओं और उनकी तिर्यक रेखा से संबंधित अन्य तथ्य ज्ञात कर सकते हैं।

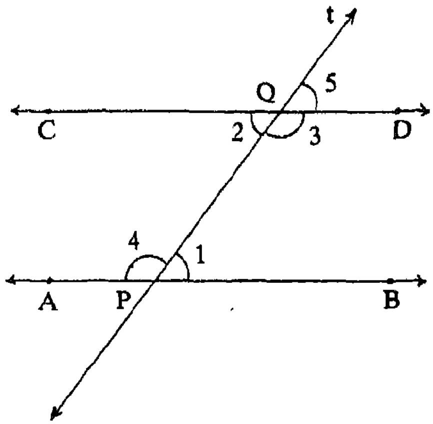
प्रमेय 9.2 (क)

यदि एक तिर्यक रेखा, दो समांतर रेखाओं को काटती है तो एकांतर अंतः कोण समान होते हैं।

दिया है : $AB || CD$

तिर्यक रेखा t, AB को P पर और CD को Q पर इस प्रकार काटती हैं कि एकांतर अंतः कोणों के युग्म बनते हैं

$\angle 1, \angle 2$; और $\angle 3, \angle 4$, (आकृति 9.22)



आकृति 9.22

सिद्ध करना है : $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$

उपपत्ति : $\angle 2 = \angle 5$ (शीर्षाभिमुख कोण)

और $\angle 1 = \angle 5$ (संगत कोण अभिगृहीत)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ .... (1)

क्योंकि किरण PQ रेखा AB पर स्थित है

$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180°$

क्योंकि किरण QP रेखा CD पर स्थित है,

$\therefore\ \angle 2 + \angle 3 = 180°$

$\therefore\ \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$

परन्तु $\angle 1 = \angle 2$ (ऊपर सिद्ध किया गया है)

$\therefore\ \angle 3 = \angle 4$ ... (2)

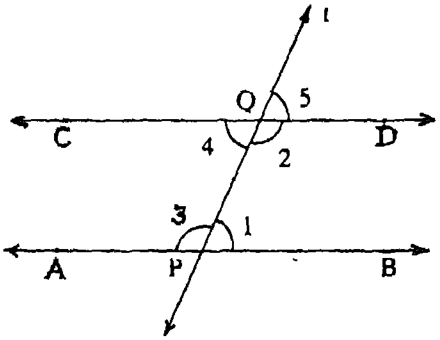
अतः $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$

प्रमेय 9.2 (ख)

यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है, तो तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्तः कोण संपूरक होते हैं।

दिया है : $AB \parallel CD$

तिर्यक रेखा t रेखा AB को P पर और रेखा CD को Q पर इस प्रकार काटती है कि तिर्यक रेखा के एक ओर दो युग्म निम्न बनते हैं : $\angle 1$, $\angle 2$ और $\angle 3$, $\angle 4$, (आकृति 9.23)



आकृति 9.23

सिद्ध करना है : $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, और

$\angle 3 + \angle 4 = 180°$

उपपत्ति : किरण QD रेखा t पर स्थित है

$\therefore\ \angle 2 + \angle 5 = 180°$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

और $\angle 1 = \angle 5$ (संगत कोण अभिगृहीत)

$\therefore\ \angle 1 + \angle 2 = 180°$ ... (1)

अब किरण PQ रेखा AB पर स्थित है,

$\therefore\ \angle 1 + \angle 3 = 180°$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

और किरण QP रेखा CD पर स्थित है

$\therefore \quad \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

$\therefore \quad (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = 360^\circ$

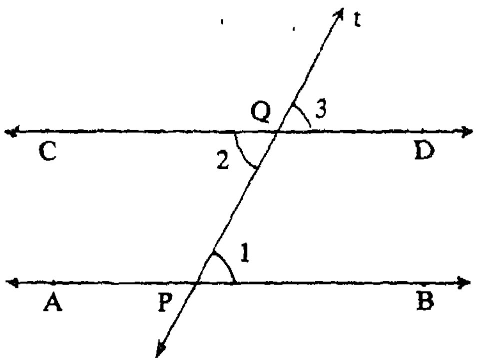
क्योंकि $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

$\therefore \quad \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ... (2)

अत: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ और $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$

प्रमेय 9.3(क): (प्रमेय 9.2(क) का विलोम) : *यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटे कि एकांतर अंत: कोण-युग्म के कोण बराबर हों, तो वे दो रेखाएं समांतर होती हैं।*

दिया है : एक तिर्यक रेखा t, दो रेखाओं AB और CD को क्रमश: P और Q पर इस प्रकार काटती है, कि $\angle 1$ और $\angle 2$, एकांतर अंत: कोण-युग्म बनते हैं और $\angle 1 = \angle 2$ (आकृति 9.24)



आकृति 9.24

सिद्ध करना है : $AB \parallel CD$

उपपत्ति : $\angle 2 = \angle 3$ (शीर्षाभिमुख कोण)

और $\angle 1 = \angle 2$ (दिया है)

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 3$

इस प्रकार संगत कोण $\angle 1$ और $\angle 3$ समान हैं।

$\therefore \quad AB \parallel CD$ (संगत कोण अभिगृहीत)

प्रमेय 9.3 (ख) (प्रमेय 9.2 (ख) का विलोम) : *यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं का इस प्रकार प्रतिच्छेद करे, कि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का एक युग्म सम्पूरक हो, तो वे रेखाएं समांतर होती हैं।*

दिया है : एक तिर्यक रेखा t, दो सरल रेखाओं AB और CD का क्रमशः P और Q पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि $\angle 1$ और $\angle 2$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का एक युग्म है और $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ है (आकृति 9.25)।

सिद्ध करना है : $AB \parallel CD$

उपपत्ति : क्योंकि किरण QD रेखा t पर खड़ी है,

$\therefore \quad \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

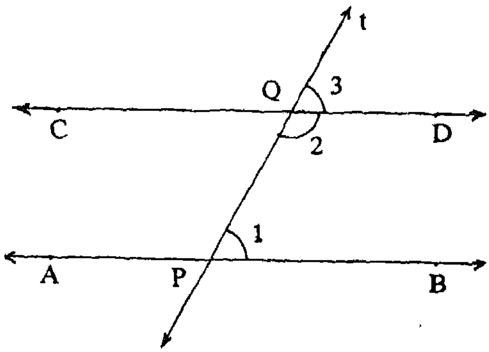
और $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (दिया है)

$\therefore \quad \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$

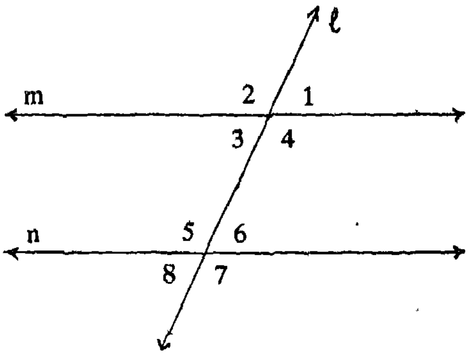
या $\angle 1 = \angle 3$

इस प्रकार, एक संगत कोण युग्म के कोण समान हैं।

अतः $AB \parallel CD$ (संगत कोण अभिगृहीत)



आकृति 9.25



आकृति 9.26

उदाहरण 9.2 : आकृति 9.26 में, $m \parallel n$, और $\angle 1 = 65°$ हो, तो $\angle 5$ और $\angle 8$ ज्ञात कीजिए

हल :

$\angle 1 = \angle 3$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle 3 = \angle 8$ (संगत कोण, $m \parallel n$)

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 8$

क्योंकि $\angle 1 = 65°$ (दिया है)

$\therefore \quad \angle 8 = 65°$ ... (1)

फिर $\angle 5 + \angle 8 = 180^\circ$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

$\therefore \angle 5 = 180^\circ - \angle 8$

$= 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ ... (2)

अतः $\angle 8 = 65^\circ$, तथा $\angle 5 = 115^\circ$

उदाहरण 9.3 : आकृति 9.27 में, यदि $\angle 3 = 61^\circ$ और $\angle 7 = 118^\circ$ हो, तो क्या $m \parallel n$?

हल : $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

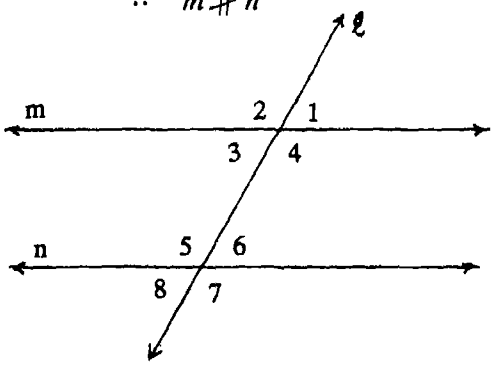
और $\angle 3 = 61^\circ$ (दिया है)

$\therefore \angle 4 = 180^\circ - \angle 3$

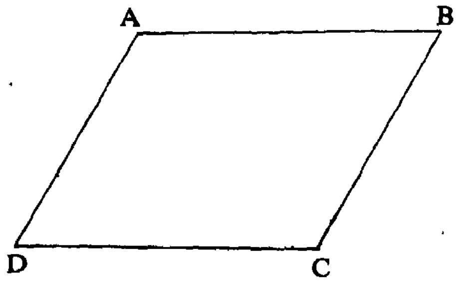
$= 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ$

अब $\angle 4$ और $\angle 7$, एक संगत कोण युग्म बनाते हैं, $\angle 4 = 119^\circ$, $\angle 7 = 118^\circ$, अर्थात् $\angle 4 \neq \angle 7$

$\therefore m \nparallel n$ (संगत कोण अभिगृहीत)



आकृति 9.27



आकृति 9.28

उदाहरण 9.4 : आकृति 9.28 में $AB \parallel CD$ और $AD \parallel CB$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle DAB = \angle DCB$

उपपत्ति : $AD \parallel BC$ और AB उनकी एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$. (तिर्यक रेखा के एक ओर के अंतः कोण) ... (1)

फिर $AB \parallel CD$ और BC एक तिर्यक रेखा है

$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$ (तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्तः कोण) ... (2)

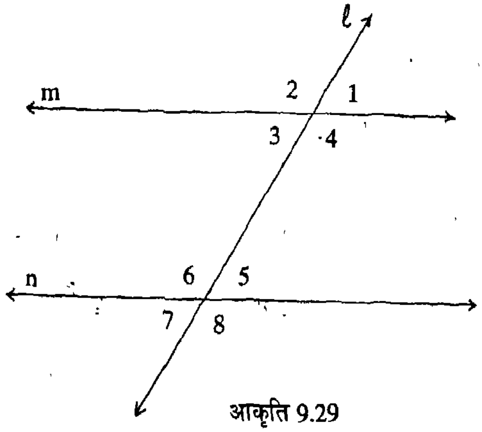
(1) और (2) से हमें प्राप्त होता है

$\angle DAB + \angle ABC = \angle DCB + \angle ABC$

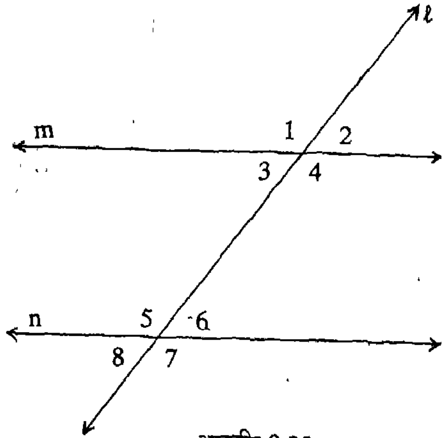
$\therefore \angle DAB = \angle DCB$

प्रश्नावली 9.3

1. आकृति 9.29 में, यदि $\angle 2 = 120°$ और $\angle 5 = 60°$ हो, तो दिखाइए कि $m \parallel n$
2. आकृति 9.30 में, $m \parallel n$, और $\angle 1$ और $\angle 2$, 3 : 2 के अनुपात में हैं। 1 से 8 तक के सभी कोण ज्ञात कीजिए।



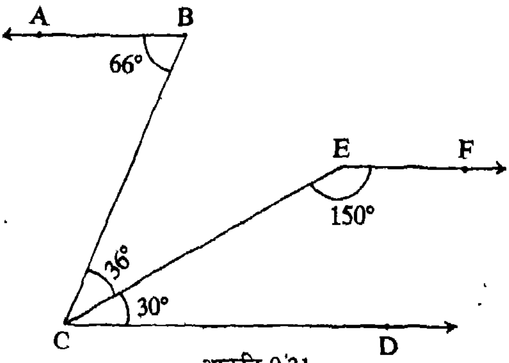
आकृति 9.29



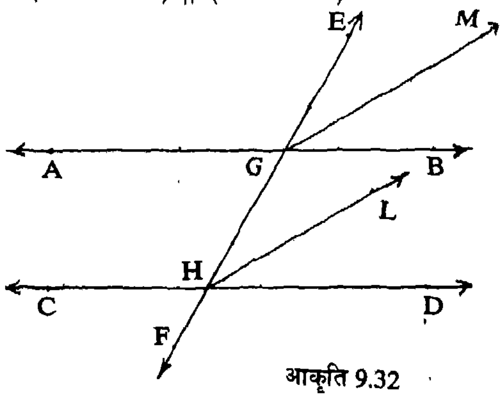
आकृति 9.30

3. आकृति 9.31 में, दिखाइए कि $AB \parallel EF$
4. यदि एक रेखा, दो समांतर रेखाओं में से एक पर लम्ब हो तो दिखाइए कि वह दूसरी रेखा पर भी लम्ब होगी।
5. आकृति 9.32 में, AB और CD दो समांतर रेखाएं हैं। GM और HL क्रमशः संगत कोणों BGE और DHE के समद्विभाजक हैं। दिखाइए कि

   (i) $\angle MGB = \angle LHD$ (ii) (किरण GM) $\parallel$ (किरण HL)

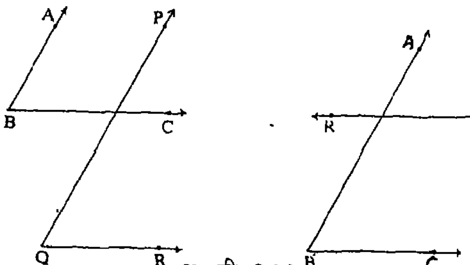


आकृति 9.31



आकृति 9.32

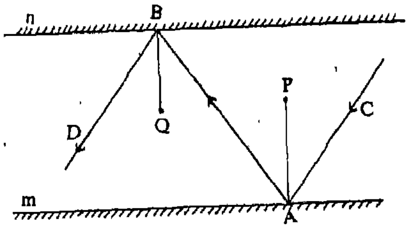
6. यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेदित करती हो, तो दिखाइए कि किसी भी एकांतर अंतः कोण-युग्म के कोणों के समद्विभाजक समांतर होंगे।
7. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा इस प्रकार प्रतिच्छेदित करे, कि संगत कोणों के एक युग्म के कोण-समद्विभाजक समांतर हों, तो दिखाइए कि वे रेखाएं समांतर होंगी।
8. एक तिर्यक रेखा, दी गई दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेदित करती है कि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण समान हैं। आकृति द्वारा दिखाइए कि उन रेखाओं का समांतर होना आवश्यक नहीं है। वह प्रतिबन्ध बताइए जिसके अंतर्गत वे रेखाएं समांतर होंगी।
9. यदि दो कोणों में, एक की भुजाएं दूसरे कोण की भुजाओं के क्रमशः समांतर हों, तो दिखाइए कि वे दोनों कोण या तो बराबर हैं या सम्पूरक (आकृति 9.33)।



आकृति 9.33

10. दो रेखाएं l और m, दो अन्य रेखाओं n और p पर, क्रमशः लम्ब हैं। दिखाइए कि यदि रेखाएं n और p परस्पर प्रतिच्छेद करती हों, तो l और m भी परस्पर प्रतिच्छेद करेंगी।

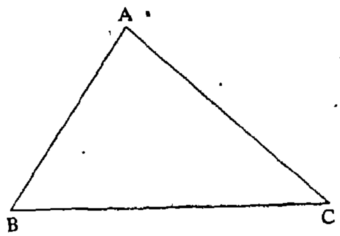
11. *आकृति 9.34 में,* m और n दो समतल दर्पण एक दूसरे के समांतर हैं। दिखाइए कि आपतित (incident) किरण CA, परावर्तित (reflected) किरण BD के समांतर हैं।
[**संकेत** : $AP \perp m$ और $BQ \perp n$, और इस प्रकार $AP \parallel BQ$]



आकृति 9.34

9.5 त्रिभुज और उसके कोण

रेखाओं और कोणों का अध्ययन करने के पश्चात् अब हम एक समतल में स्थित ऐसी आकृतियों पर विचार करेंगे जो दो से अधिक रेखाओं द्वारा बनी हों। इनमें त्रिभुज (triangle) सब से सरल आकृति है, (आकृति 9.35)।



आकृति 9.35

यदि तीन बिन्दु A, B, C संरेख न हों, तो रेखाखंड AB, BC और CA एक त्रिभुज की रचना करते हैं, जिसके *शीर्षबिन्दु* A, B और C हैं। रेखाखण्डों AB, BC और CA को *त्रिभुज की भुजाएं* और कोण BAC, कोण ABC और कोण ACB (संक्षेप में, कोण A, B और C) को *त्रिभुज के कोण* कहते हैं। हम शब्द त्रिभुज के स्थान पर प्रतीक 'Δ' का भी प्रयोग करते हैं। इस प्रकार त्रिभुज ABC को प्रतीक ΔABC से प्रकट करेंगे।

त्रिभुजों का वर्गीकरण या तो उनकी भुजाओं के आधार पर या उन के कोणों के आधार पर तीन प्रकार से कर सकते हैं।

(क) *भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण*

(i) ऐसे त्रिभुज को, जिसकी कोई भी दो भुजाएं बराबर न हों, विषम बाहु (scalene) *त्रिभुज* कहते हैं।

(ii) *ऐसे त्रिभुज को जिस की दो भुजाएं बराबर हों, समद्विबाहु* (isosceles) *त्रिभुज कहते हैं।*

(iii) *ऐसे त्रिभुज को, जिस की तीनों भुजाएं, एक दूसरे के बराबर हों, सम बाहु* (equilateral) *त्रिभुज कहते हैं*

(ख) *कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण*

(i) *ऐसे त्रिभुज को, जिसका प्रत्येक कोण न्यूनकोण हो, न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं।*

(ii) *ऐसे त्रिभुज को, जिसका एक कोण समकोण हो, समकोण त्रिभुज कहते हैं।*

(iii) *ऐसे त्रिभुज को जिसका एक कोण 'अधिक कोण' हो, अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।*

अब हम, त्रिभुज के कोणों के बारे में, एक महत्वपूर्ण गुणधर्म ज्ञात करेंगे, जो यह है कि त्रिभुज के कोणों का योगफल 180° होता है।

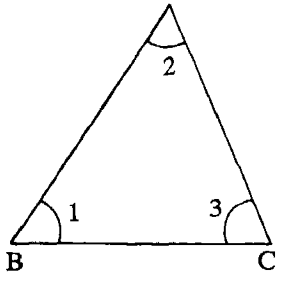
प्रमेय 9.4

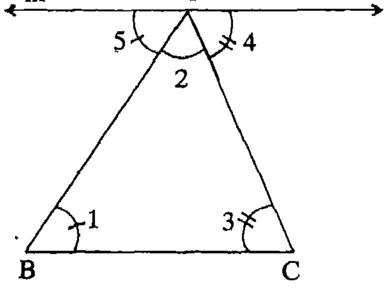
त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180° होता है।

दिया है : एक त्रिभुज ABC (आकृति 9.36)

सिद्ध करना है : $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

रचना : बिन्दु A से होती हुई BC के समांतर एक रेखा m खींचिए।





आकृति 9.36

उपपत्ति : क्योंकि $BC \parallel m$

$\therefore \angle 1 = \angle 5$ (एकान्तर कोण)

और $\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोण)

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5$ दोनों पक्षों में $\angle 2$ योग करने पर

$\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 2$

परन्तु $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

अतः त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180° होता है।

उदाहरण 9.5 : एक त्रिभुज के तीन कोणों में से, एक कोण सबसे छोटे कोण का दुगुना और दूसरा सबसे छोटे कोण का तिगुना है। सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए त्रिभुज का सबसे छोटा कोण $x°$ है, तो उसके अन्य कोण $2x°$ और $3x°$ होंगे। इस प्रकार

$\therefore x + 2x + 3x = 180$

$\therefore \quad x = 30$

अतः त्रिभुज के कोण हैं : 30°, 60°, 90°

उदाहरण 9.6 : आकृति 9.37 में, AB और CD दो समांतर रेखाएं हैं। तिर्यक रेखा EF के एक ओर स्थित अन्तः कोणों के समद्विभाजक बिन्दु P पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle MPN$ एक समकोण है।

उपपत्ति : $\angle BMN + \angle DNM = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ओर के अंतः कोण, $AB \parallel CD$) ... (1)

अब क्योंकि किरण MP समद्विभाजक है $\angle BMN$ का, दिया है

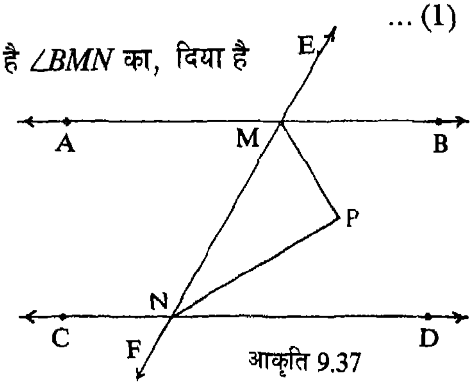
$\therefore \angle PMN = \frac{1}{2} \angle BMN$

इसी प्रकार $\angle PNM = \frac{1}{2} \angle DNM$

$\therefore \angle PMN + \angle PNM$

$= \frac{1}{2} \angle BMN + \frac{1}{2} \angle DNM$

$= 90°$, (1) के प्रयोग से ... (2)



आकृति 9.37

परन्तु $\angle PMN + \angle PNM + \angle MPN = 180°$ (त्रिभुज के कोण) ... (3)

(2) और (3) से $\angle MPN = 180° - 90° = 90°$

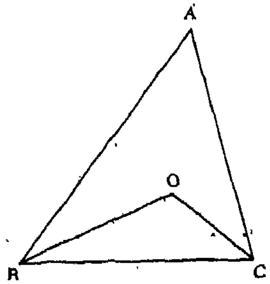
$\therefore \angle MPN$ एक समकोण है।

प्रश्नावली 9.4

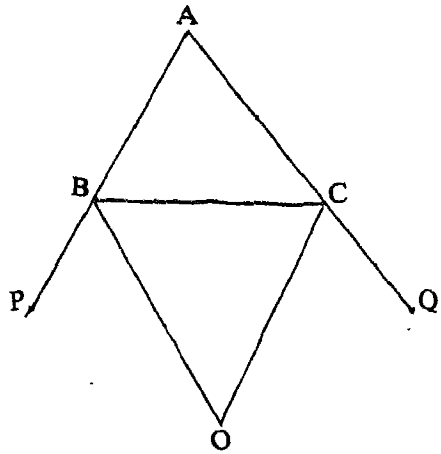
1. एक त्रिभुज ABC में, $\angle B = 105°$ और $\angle C = 50°$ हैं; $\angle A$ का माप ज्ञात कीजिए।
2. यदि एक त्रिभुज के कोण 2 : 3 : 4 के अनुपात में हों तो तीनों कोण ज्ञात कीजिए।
3. क्या एक त्रिभुज में हो सकते हैं
   (i) दो समकोण? (ii) दो अधिककोण?
   (iii) दो न्यूनकोण? (iv) प्रत्येक कोण 60° से बड़ा?
   (v) प्रत्येक कोण 60° से छोटा? (vi) प्रत्येक कोण 60° का?

प्रत्येक में उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5. एक त्रिभुज ABC का कोण A समकोण है; और $AL \perp BC$ । सिद्ध कीजिए कि $\angle BAL = \angle ACB$
6. आकृति 9.38 में, $\angle ABC$ और $\angle ACB$ के समद्विभाजक बिन्दु O पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2} \angle BAC$
7. आकृति 9.39 में, त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः P और Q तक बढ़ाया गया है। $\angle PBC$ और $\angle QCB$ के समद्विभाजक बिन्दु O पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2} \angle BAC$

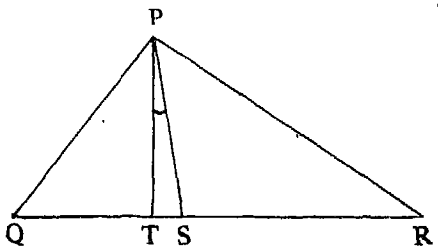


आकृति 9.38

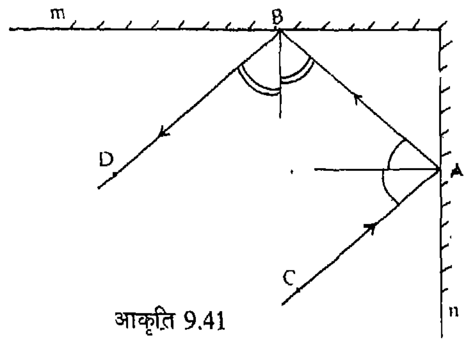


आकृति 9.39

8. आकृति 9.40 में PS, $\angle P$ का समद्विभाजक है और $PT \perp QR$, दिखाइये कि $\angle TPS = \frac{1}{2}(\angle Q - \angle R)$
9. यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेदित करती हो, तो सिद्ध कीजिए कि अंतः कोणों के दो युग्मों के समद्विभाजकों से एक आयत बनता है।
10. आकृति 9.41 में, m और n दो समतल दर्पण हैं जो परस्पर लम्ब हैं। दिखाइए कि आपतित किरण CA परावर्तित किरण BD के समांतर है।



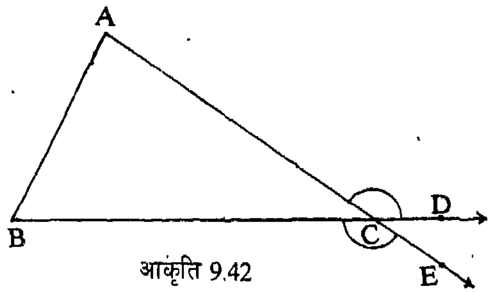
आकृति 9.40



आकृति 9.41

9.6 त्रिभुज के बहिष्कोण

परिभाषा : *यदि त्रिभुज ABC की भुजा BC को बढ़ा कर किरण BD* (आकृति 9.42) *बना दें तो ∠ACD को, त्रिभुज ABC का शीर्ष C पर बहिष्कोण कहते हैं।*



आकृति 9.42

त्रिभुज ABC के शीर्ष C पर बहिष्कोण ACD के सापेक्ष, $\angle A$ और $\angle B$ को *सुदूर अंतः कोण* (remote interior angles) या *अंतः अभिमुख कोण* (interior opposite angles) कहते हैं।

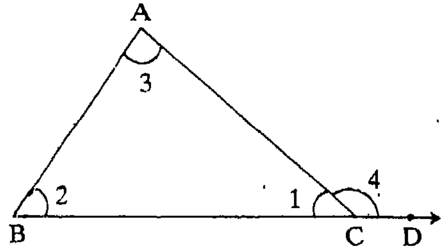
अब, यदि किसी भुजा BC के स्थान पर, भुजा AC को किरण AE तक बढ़ाया जाए, तो $\angle BCE$ भी $\Delta\ ABC$ का शीर्ष C पर बहिष्कोण है। क्योंकि $\angle ACD$ और $\angle BCE$ शीर्षाभिमुख कोण हैं, अतः वे परस्पर बराबर होंगे। इसके अतिरिक्त, $\angle A$ और $\angle B$, बहिष्कोण $\angle BCE$ के सापेक्ष भी सुदूर अंतः कोण हैं।

इस प्रकार त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष पर त्रिभुज के दो बहिष्कोण होते हैं और वे परस्पर बराबर होते हैं।

आगे दिये गए प्रमेय द्वारा, त्रिभुज के प्रत्येक बहिष्कोण को उसके सापेक्ष सुदूर अंतः कोणों के योगफल के रूप में प्रकट कर सकते हैं।

प्रमेय 9.5 : *यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाए तो इस प्रकार बना बहिष्कोण दो सुदूर अन्तः कोणों के योगफल के बराबर होता है।*

दिया है : ΔABC में D बढ़ाई गई भुजा BC पर एक बिन्दु है जो बहिष्कोण $\angle 4$ बनाता है। (आकृति 9.43)



आकृति 9.43

सिद्ध करना है : $\angle 4 = \angle 2 + \angle 3$

उपपत्ति : $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (Δ के तीनों कोणों का योग) ... (1)

तथा $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत) ... (2)

(1) तथा (2) से $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4$

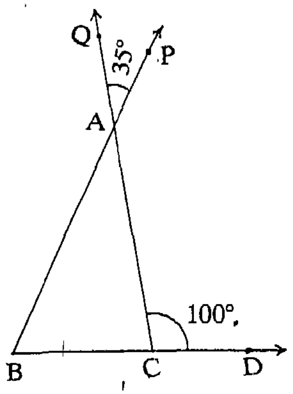
$\therefore\ \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$

टिप्पणी : क्योंकि $\angle 2 + \angle 3 = \angle 4$ है इसलिए स्पष्ट है कि $\angle 4 > \angle 2$ तथा $\angle 4 > \angle 3$ से। इसका अर्थ है (आकृति 9.43) कि किसी त्रिभुज का कोई बहिष्कोण प्रत्येक सुदूर अन्तः कोण से बड़ा होता है। ऐसे परिणाम को जो एक प्रमेय से सुगमता से प्राप्त हो जाए, उसे इस प्रमेय का उपप्रमेय (corollary) कहते हैं। इसलिए हम निम्न उल्लेख करते हैं।

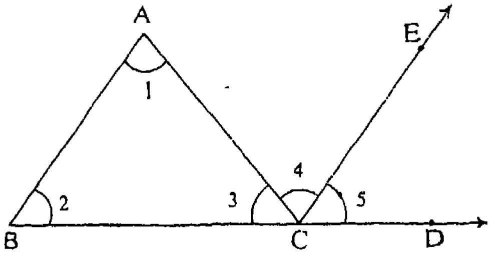
उपप्रमेय : *किसी त्रिभुज का बहिष्कोण सदैव किसी एक अभिमुख अंतः कोण से बड़ा होता है।* यह परिणाम प्रमेय 9.5 से सुगमता से प्राप्त होता है। हम कभी-कभी इसे *बहिष्कोण प्रमेय* कहते हैं।

प्रश्नावली 9.5

1. त्रिभुज का एक बहिष्कोण 110° का और एक सुदूर अंतः कोण 30° का है। त्रिभुज के अन्य कोण ज्ञात कीजिए।
2. त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और BA को क्रमशः D, Q और P तक बढ़ाया गया है। (आकृति 9.44) यदि $\angle ACD = 100°$ और $\angle QAP = 35°$, तो त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.44



आकृति 9.45

3. आकृति 9.45 में, $\Delta\ ABC$ की भुजा BC को बढ़ा कर किरण BD बनाया है तथा $CE \parallel AB$। त्रिभुज के कोणों के योगफल सम्बन्धी प्रमेय का प्रयोग किए बिना सिद्ध कीजिए कि

$$\angle ACD = \angle A + \angle B$$

और फिर निर्धारित कीजिए कि

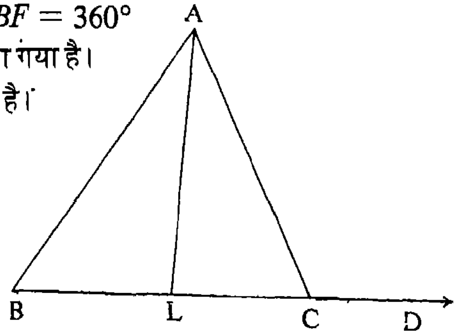
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

4. त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB को क्रमानुसार बढ़ाकर बहिष्कोण $\angle ACD$, $\angle BAE$ और $\angle CBF$ बनाए गए हैं। दिखाइए कि

$$\angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 360°$$

5. त्रिभुज ABC की भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है। $\angle A$ का समद्विभाजक BC से L पर मिलता है। (आकृति 9.46) सिद्ध कीजिए कि

$$\angle ABC + \angle ACD = 2\ \angle ALC$$



आकृति 9.46

9.7 बहुभुज (उत्तल, सम)

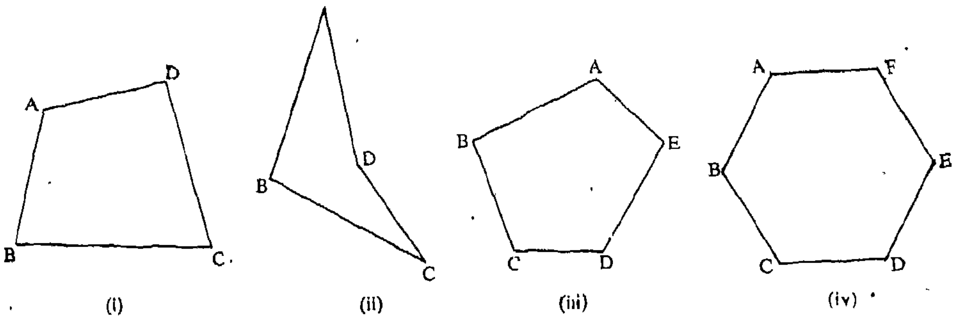
परिभाषा : *मान लीजिए कि $n\ (\geq 3)$ के लिए $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$, एक समतल में भिन्न भिन्न बिन्दु हैं। यदि रेखाखण्ड P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_1 ऐसे हों कि*

(i) दो रेखाखण्ड अपने अंत्य बिन्दुओं को छोड़कर, किसी अन्य बिन्दु पर प्रतिच्छेद न करें, और

(ii) कोई दो रेखाखण्ड, जिन का एक उभयनिष्ठ अंत्य बिन्दु है, संरेख न हों, तो n रेखाखण्डों $P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_1$ के सम्मिलन को बहुभुज कहते हैं और बिन्दुओं $P_1, P_2, ..., P_n$ को उसके शीर्ष बिन्दु कहते हैं। इसे 'बहुभुज $P_1P_2 ... P_n$' से प्रकट करते हैं।

जिन n रेखाखण्डों से बहुभुज बना हो, उनमें से प्रत्येक को *बहुभुज की भुजा* कहते हैं। एक शीर्ष पर मिलने वाली दो भुजाओं से निर्धारित कोण को *बहुभुज का कोण* कहते हैं।

टिप्पणी : यदि $n = 3$ हो, तो बहुभुज का विशे ाम है : त्रिभुज, और इसी प्रकार यदि $n = 4$ हो, तो बहुभुज का विशेष नाम है : चतुर्भुज। [आकृति 9.47 (i) और (ii)] अन्य विशेष नाम इस प्रकार हैं :



आकृति 9.47

पंचभुज ($n = 5$) [आकृति 9.47 (iii)]
षट्भुज ($n = 6$) [आकृति 9.47 (iv)]

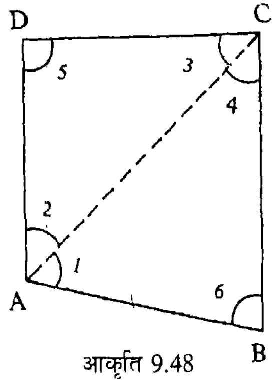
परिभाषा : *एक बहुभुज $P_1P_2 ... P_n$ को उत्तल बहुभुज कहते हैं यदि बहुभुज की प्रत्येक भुजा के लिए बहुभुज के अन्य सभी शीर्ष, उस भुजा को आविष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित हों। आकृति 9.47 में, (i), (iii) और (iv) उत्तल बहुभुज हैं जबकि (ii) उत्तल नहीं है।*

टिप्पणी : आगे इस पुस्तक में हम केवल उत्तल बहुभुजों पर ही विचार करेंगे; अतः इस अध्ययन में प्रत्येक बहुभुज का अर्थ उत्तल बहुभुज से होगा।

परिभाषा : *यदि एक बहुभुज की सभी भुजाएं बराबर हों और उसके सभी कोण भी बराबर हो; तो ऐसे बहुभुज को सम बहुभुज (regular polygon) कहते हैं।*

चतुर्भुज का कोण योगफल गुणधर्म

प्रमेय 9.6 : *चतुर्भुज के चारों कोणों का योगफल 360° होता है।*



आकृति 9.48

दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ (आकृति 9.48)

सिद्ध करना है : $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

रचना : विकर्ण AC खींचिए।

उपपत्ति : हमें प्राप्त है

$\angle 1 + \angle 4 + \angle 6 = 180°$ (त्रिभुज के कोणों का योग)

$\angle 2 + \angle 3 + \angle 5 = 180°$ (त्रिभुज के कोणों का योग)

$\therefore (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 4 + \angle 3) + \angle 6 + \angle 5 = 360°$

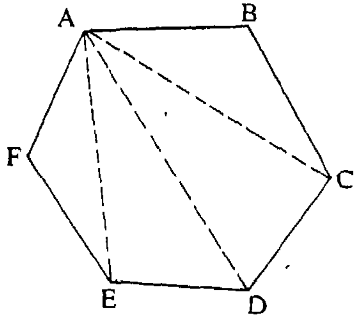
या $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

उदाहरण 9.7 : सिद्ध कीजिए कि एक षट्भुज के सभी कोणों का योगफल 720° होता है।

दिया है : षट्भुज $ABCDEF$

सिद्ध करना है : $\angle FAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF + \angle EFA = 720°$

[**विश्लेषण :** आपने देखा है कि इसी प्रकार की एक स्थिति चतुर्भुज के कोणों की थी जिसमें चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में विभाजित करके, हमने इसी प्रकार की उपपत्ति दी है। उसी प्रकार, AC, AD और AE को मिलाएं तो हमें चार त्रिभुज प्राप्त होंगे।]



आकृति 9.49

रचना : AE, AD और AC को मिलाइए।

उपपत्ति : ΔABC में, $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180°$ (1)

ΔADC में, $\angle DAC + \angle ACD + \angle CDA = 180°$ (2)

ΔAED में, $\angle EAD + \angle ADE + \angle DEA = 180°$ (3)

ΔFAE में, $\angle FAE + \angle AEF + \angle EFA = 180°$ (4)

(1), (2), (3). और (4) को योग करने और पुनः समूह बनाने पर

$(\angle BAC + \angle DAC + \angle EAD + \angle FAE)$

$+ \angle ABC + (\angle BCA + \angle ACD) + (\angle CDA + \angle ADE)$

$+ (\angle DEA + \angle AEF) + \angle EFA = 720°$

या $\angle FAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF + \angle EFA = 720°$

टिप्पणी : यदि हमारे पास पंचभुज हो, तो हम इसे तीन त्रिभुजों में बांट सकेंगे जैसा कि आकृति 9.50 में दिखाया गया है, और इसके अंतः कोणों का योगफल $3 \times 180°$ अर्थात् 540° होगा।

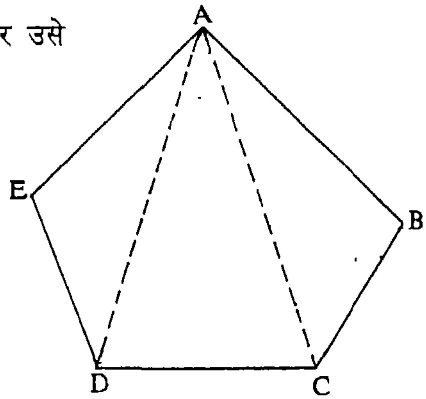
व्यापक रूप में, यदि हमारे पास n ($n \geq 3$) भुजाओं का बहुभुज हो तो हम उचित शीर्ष चुनकर उसे (n —2) त्रिभुजों में बांट सकते हैं इस प्रकार n भुजावाली बहुभुज के सभी अन्तः कोणों का योगफल

$$(n - 2) \times 180°$$

$$= (n - 2) \times 2 \text{ सम कोण}$$

$$= (2n - 4) \text{ समकोण}$$

होगा।

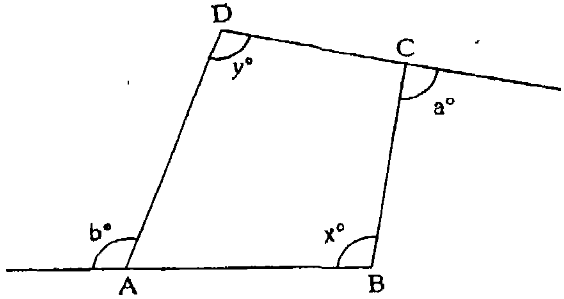


आकृति 9.50

प्रश्नावली 9.6

1. एक चतुर्भुज के तीन कोण 100°, 48° और 92° हैं। चौथा कोण ज्ञात कीजिए।
2. चतुर्भुज *ABCD* में, कोण *A, B, C, D;* 1 : 2 : 3 : 4 के अनुपात में हैं। चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।
3. समषट्भुज के प्रत्येक कोण का माप बताइए।
4. एक सम बहुभुज के प्रत्येक कोण का माप 108° है; उसकी भुजाओं की संख्या बताइए।
5. सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि इसके प्रत्येक कोण का माप हो :
   (क) 160° (ख) 135° (ग) 175° (घ) 162°

6. चतुर्भुज $ABCD$ की भुजाओं BA और DC को बढ़ाया गया है जैसा कि आकृति 9.51 में दिखाया गया है। सिद्ध कीजिए कि $a + b = x + y$



आकृति 9.51

7. $ABCDE$ एक सम पंचभुज है। पंचभुज के $\angle A$ का समद्विभाजक, भुजा CD को बिन्दु M पर मिलता है। दिखाइए कि $\angle AMC = 90°$
[**संकेत :** समपंचभुज का प्रत्येक कोण 108° का है।]

अध्याय 10

सर्वांगसम त्रिभुज

10.1 आकृतियों की सर्वांगसमता

कुछ गणितीय वस्तुओं (आकृतियों) का उनके कुछ विशेष गुणधर्मों के आधार पर वर्गीकरण करना गणित की एक आधारभूत समस्या है। ज्यामिति में आकृतियों का वर्गीकरण करने के लिए हम जिस सरल परन्तु मौलिक संकल्पना का प्रयोग करते हैं वह है *सर्वांगसमता*। मोटे तौर पर, दो आकृतियां सर्वांगसम होती हैं यदि वे आमाप (size) और आकार में समान हों।

हमने (i) दो रेखा खण्डों और (ii) दो कोणों की सर्वांगसमता के विचार को स्पष्ट करने के लिए अध्यारोपण विधि का प्रयोग किया था। सामान्यतः इस विधि का प्रयोग एक ही प्रकार की किन्हीं भी दो आकृतियों के लिए भी कर सकते हैं। परन्तु यह विधि इतनी सुविधाजनक नहीं है कि इसका प्रयोग किया जा सके। अतः जहां भी सम्भव हो, हम संख्याओं का प्रयोग करना चाहेंगे। रेखा-खण्ड की लम्बाई और कोण का माप, ज्यामिति में संख्याओं के प्रयोग के उदाहरण हैं। हम सर्वांगसमता के लिए भी इनका प्रयोग करेंगे।

दो रेखा-खण्डों की सर्वांगसमता

आपको याद होगा कि दो सर्वांगसम रेखाखण्डों की लम्बाई बराबर होती है और विलोमतः दो रेखाखण्ड, जिन की लम्बाई बराबर हो, सर्वांगसम होते हैं। हम इन तथ्यों को इस प्रकार भी प्रकट कर सकते हैं।

दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं, यदि और केवल यदि उनकी लम्बाई बराबर हो।



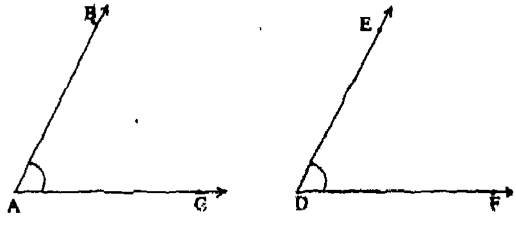
आकृति 10.1

इस प्रकार, दो रेखाखण्डों की सर्वांगसमता की एक सरल कसौटी (पर्याप्त प्रतिबन्ध) निम्न है :

दो रेखाखण्ड, AB और CD, सर्वांगसम होंगे यदि $AB = CD$ हो।

दो कोणों की सर्वांगसमता

दो रेखाखण्डों के स्थान पर, दो कोणों को लेने पर, हम यह परिणाम प्राप्त करते हैं:



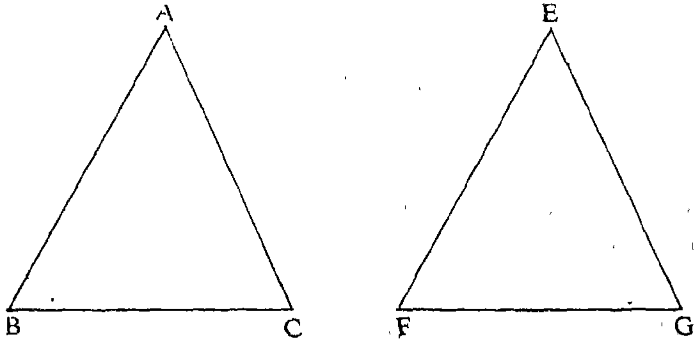
आकृति 10.2

- *दो कोण सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि उनके माप बराबर हों।*
- पहले की भांति, दो कोणों की सर्वांगसमता की एक सरल कसौटी (पर्याप्त प्रतिबन्ध) निम्न है: *दो कोण BAC और EDF सर्वांगसम हैं यदि $m\angle BAC = m\angle EDF$ हो।*

10.2 दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता

व्यापक रूप से, हम कह सकते हैं कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि और केवल यदि, एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर अध्यारोपित करने से उसको पूर्ण रूप से और ठीक-ठीक ढक सके।

मान लीजिए ΔABC, ΔEFG के सर्वांगसम है, [आकृति 10.3(i)] तो हमारे लिए यह सम्भव है



आकृति 10.3(i)

कि ΔABC को, ΔEFG पर इस प्रकार अध्यारोपित करें कि वह उसको पूरा और ठीक-ठीक ढक लें। अब, हम ऐसे किसी भी अध्यारोपण में, ΔABC के शीर्ष-बिन्दु ΔEFG के शीर्ष-बिन्दुओं पर किसी क्रम से रखेंगे। और फिर ΔABC की प्रत्येक भुजा, ΔEFG की संगत भुजा पर इस प्रकार अध्यारोपित होगी कि उसको पूरा और ठीक-ठीक ढक ले। ΔABC का प्रत्येक कोण ΔEFG के संगत कोण पर इस प्रकार अध्यारोपित होगा कि वह दोनों एक दूसरे को पूरा और ठीक-ठीक ढक ले। इस प्रकार, वह क्रम जिसमें शीर्ष-बिन्दु संगत होते हैं, अपने आप से, त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों में संगतता निर्धारित कर देता है। और यदि अध्यारोपण ठीक-ठीक है, तो हमें छः समिकाएँ प्राप्त होती हैं जिनमें से तीन संगत भुजाओं की और तीन संगत कोणों की होती हैं।।

मान लीजिए, अध्यारोपण द्वारा, ΔABC ठीक-ठीक ढक लेता है ΔEFG को, जबकि ΔABC के शीर्ष-बिन्दु ΔEFG के शीर्ष बिन्दुओं पर इस क्रम से गिरे कि:

$A \longleftrightarrow E,\ \ B \longleftrightarrow F,\ \ C \longleftrightarrow G,$

या संक्षेप में $ABC \longleftrightarrow EFG$

हमें निम्नलिखित समिकाएँ प्राप्त होती हैं :

$$AB = EF \qquad BC = FG \qquad CA = GE$$
$$\angle A = \angle E \qquad \angle B = \angle F \qquad \angle C = \angle G$$

अब, दो त्रिभुजों ABC और EFG के शीर्ष बिन्दुओं के बीच, $ABC \longleftrightarrow EFG$ के प्रकार की संगतता को हम सदैव मान सकते हैं, चाहे अध्यारोपण से, एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को पूरा और ठीक-ठीक ढक सके या नहीं। यदि आप ऐसी संगतताओं के विचार करने का प्रयत्न करें तो देखेंगे कि ऐसी छः संगतताएँ हैं, जो निम्न हैं:

$$ABC \longleftrightarrow EFG, \quad ABC \longleftrightarrow FGE, \quad ABC \longleftrightarrow GEF$$
$$ABC \longleftrightarrow EGF, \quad ABC \longleftrightarrow GFE, \quad ABC \longleftrightarrow FEG$$

यदि ΔABC, ΔEFG के सर्वांगसम है तो इन छः सम्भव संगतताओं में से, कम से कम एक संगतता ऐसी होगी, जिसके अनुरूप अध्यारोपण से, एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को पूरा और ठीक-ठीक ढक सकेगा। और इस प्रकार हमें तीन समिकाएँ संगत भुजाओं की लम्बाइयों की, और तीन समिकाएं संगत कोणों कोणों के मापों की प्राप्त होंगी। दूसरी ओर, यदि ΔABC, ΔEFG के सर्वांगसम नहीं है, तो छः में से किसी भी संगतता में अध्यारोपण से त्रिभुजों का पूरा और ठीक ठीक ढक जाना प्राप्त नहीं होगा। इसलिए, प्रत्येक संगतता में ΔABC का कम से कम एक भाग ऐसा होगा जो ΔEFG के संगत भाग के बराबर नहीं होगा।

अतः दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता का एक निम्नलिखित व्यापक नियम प्राप्त होता है:

दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि, उनके शीर्ष-बिन्दुओं में एक ऐसी संगतता हो कि त्रिभुजों की संगत भुजाएं और संगत कोण बराबर हों।

संकेतन : यदि ΔABC, ΔEFG के सर्वांगसम है, और संगतता $ABC \longleftrightarrow EFG$ से एक त्रिभुज के छः भाग दूसरे त्रिभुज के छः भागों के सर्वांगसम हो जाते हैं, तो हम लिखते हैं:

$$\Delta ABC \cong \Delta EFG$$

ध्यान दीजिए कि त्रिभुजों के नामों में, अक्षरों का क्रम, उस संगतता का भी संकेत करता है, जिससे सर्वांगसमता स्थापित होती है। इसे हम एक परिपाटी के रूप में मान लेते हैं। इसके कारण, दो त्रिभुजों के नाम लिखने के क्रम से, हम आसानी से वे छः समिकाएँ प्राप्त कर सकते हैं जो दो सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भागों के बीच होती हैं।

सभी त्रिभुजों के समुच्चय में सर्वांगसमता सम्बन्ध

त्रिभुजों की सर्वांगसमता की परिभाषा और ऊपर दी गई संकेत विधि से, निम्नलिखित परिणाम तुरन्त प्राप्त होते हैं:

(i) यदि $\Delta ABC \cong \Delta EFG$, तो $\Delta EFG \cong \Delta ABC$

(ii) यदि $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ और $\Delta EFG \cong \Delta PQR$, तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

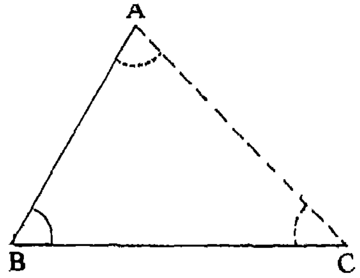
(iii) स्पष्टतया $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

10.3 दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध

हमेशा की तरह यहां भी मितव्ययता का प्रश्न उठता है। दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, **क्या सभी** छः समिकाओं की आवश्यकता है? दूसरे शब्दों में, **कम से कम कितनी समिकाएँ दी हुई हों, जिससे**

त्रिभुजों की सर्वागसमता निर्धारित हो जाए। यह पता चलता है कि यदि इन छः समिकाओं में से ठीक से चुनी गई तीन समिकाएं सन्तुष्ट होती हों तो शेष तीन समिकाएँ अपने आप सन्तुष्ट हो जाती हैं। इस प्रकार का हमारा पहला परिणाम एक अभिगृहीत है। इसका प्रयोग हम इस प्रकार के अन्य परिणामों को सिद्ध करने के लिए करेंगे।

मान लीजिए एक त्रिभुज ABC है जिस की भुजाएं AB और BC, और अंतरित कोण (included angle) $\angle ABC$ ज्ञात हैं। इस प्रकार भुजाएं AB, BC और कोण $\angle ABC$ निश्चित हैं। तब, जैसा कि साथ की आकृति से स्पष्ट है, भुजा CA स्वतः ही निश्चित हो जाती है और इसके साथ ही शेष दो कोण $\angle C$ और $\angle A$ भी निश्चित हो जाते हैं। अतः यदि त्रिभुज की दो भुजाएं और उनका अंतरित कोण ज्ञात हों, तो त्रिभुज अद्वितीय रूप से निश्चित हो जाता है। इस संकल्पना से हम निम्नलिखित अभिगृहीत निर्धारित करते हैं।



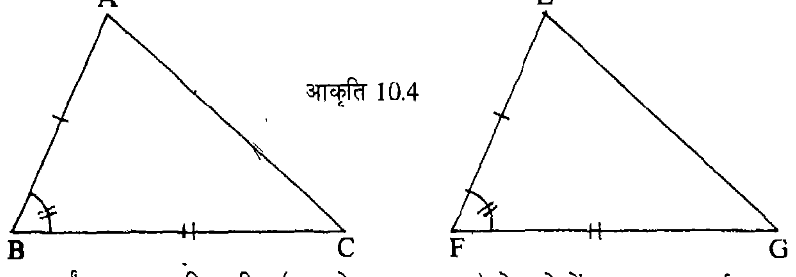
आकृति 10.3(ii)

अभिगृहीत 10.1 भु-को-भु (भुजा-कोण-भुजा) सर्वांगसमता अभिगृहीत

यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएं और उनका अंतरित कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएं और उनके अंतरित कोण के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

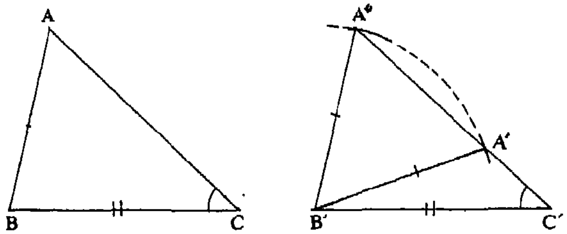
टिप्पणी : क्योंकि यह अभिगृहीत, त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतरित कोण से संबंधित होता है, इसलिए इसे (भुजा-कोण-भुजा) *भु-को-भु* सर्वांगसमता *अभिगृहीत* व *भु-को-भु कसौटी* कहते हैं।

इस प्रकार, उदाहरण के लिए, यदि आकृति 10.4 में, $AB = EF$, $BC = FG$, और $\angle B = \angle F$ तो $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ (अर्थात् $CA = GE$, $\angle A = \angle E$ और $\angle C = \angle G$ होंगे)।



आकृति 10.4

टिप्पणी : भु-को-भु सर्वांगसमता अभिगृहीत (भु-को-भु स० अ०) के बारे में एक महत्वपूर्ण बात यह है कि अंतरित कोण बराबर होने चाहिए। मान लीजिए एक त्रिभुज की दो भुजाएं और एक कोण (जो भुजाओं के अंतरित न हो) दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और एक कोण के बराबर है, तो क्या त्रिभुज सर्वांगसम होंगे? नहीं। यह स्पष्ट करने के लिए, आकृति 10.5 देखिए:



आकृति 10.5

ध्यान दीजिए कि त्रिभुज ABC और त्रिभुज $A'B'C'$ में, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, और $\angle BCA = \angle B'C'A'$, परन्तु स्पष्ट है कि ΔABC, $\Delta A'B'C'$ के सर्वांगसम नहीं है। यहां भु-को-भु अभिगृहीत लागू नहीं है क्योंकि $\angle BCA$, दो भुजाओं AB और BC के अंतरित नहीं है।

हम भु-को-भु अभिगृहीत का अनुप्रयोग निम्न उपयोगी परिणाम को सिद्ध करने में करेंगे।

प्रमेय 10.1 : *त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।*

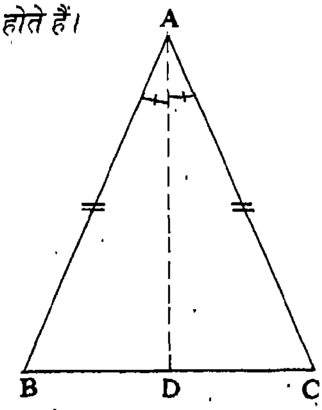
दिया है : ΔABC में, $AB = AC$ (आकृति 10.6)

सिद्ध करना है : $\angle C = \angle B$

रचना : हम $\angle A$ का समद्विभाजक AD खींचते हैं जो BC को D पर मिलता है।

उपपत्ति : ΔABD और ΔACD में,

$AB = AC$	(दिया है)
$\angle BAD = \angle CAD$	(रचना)
$AD = AD$	(उभयनिष्ठ)
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$	(भु-को-भु स० अ०)
अतः $\angle B = \angle C$	(सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)



आकृति 10.6

उदाहरण 10.1 : ΔABC में, मान लीजिए $\angle A = 100°$ और $AB = AC$ हो, तो $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में, (आकृति 10.7)

$AB = AC$.

$\therefore \angle C = \angle B$

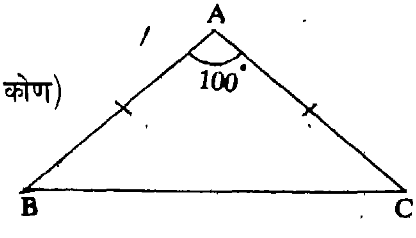
अब, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (त्रिभुज के कोण)

या, $100° + \angle B + \angle B = 180°$

या, $2\angle B = 180° - 100°$

$= 80°$

$\therefore \angle B = \angle C = 40°$



आकृति 10.7

उदाहरण 10.2 : ΔPQR में, यदि $PQ = QR = RP$ हो (अर्थात् यदि ΔPQR समबाहु त्रिभुज हो) तो सिद्ध कीजिए कि इसका प्रत्येक कोण $60°$ है।

हल : ΔPQR में (आकृति 10.8)

$PQ = QR$ (दिया है)

$\therefore \angle P = \angle R$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण) ... (1)

फिर $PQ = PR$ (दिया है)

$\therefore \angle Q = \angle R$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण) ... (2)

(1) और (2) से प्राप्त होता है :

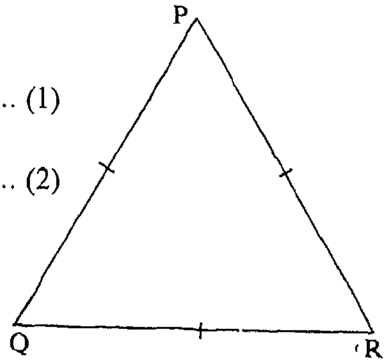
$\angle P = \angle Q = \angle R$

परन्तु, $\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$ (त्रिभुज के कोणों का योग)

$\therefore 3\ \angle P = 180°$

या $\angle P = 60°$

अत: $\angle P = \angle Q = \angle R = 60°$



आकृति 10.8

प्रमेय 10.2 को-भु-को (कोण-भुजा-कोण) सर्वांगसमता प्रमेय

यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतरित भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और उनकी अंतरित भुजा के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

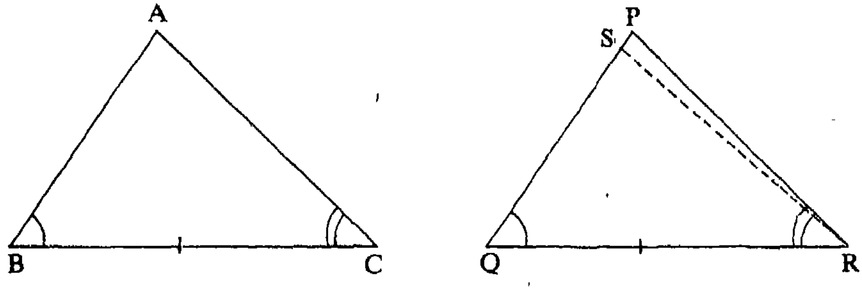
दिया है : ΔABC और ΔPQR में

$\angle B = \angle Q$

$\angle C = \angle R$

$BC = QR$

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



आकृति 10.9

उपपत्ति :

स्थिति I : यदि $AB = PQ$ हो, तो भु-को-भु अभिगृहीत द्वारा $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, और इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

स्थिति II : मान लीजिए $AB \neq PQ$, और मान लीजिए $AB < PQ$, तो भुजा PQ पर ऐसा बिन्दु S लीजिए कि $QS = AB$ हो। RS को मिलाइए।

ΔABC और ΔSQR में,

$AB = SQ$ (माना हुआ है)

$BC = QR$ (दिया है)

$\angle B = \angle Q$ (दिया है)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta SQR$ (भु-को-भु अभिगृहीत)

अत: $\angle ACB = \angle QRS$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

परन्तु $\angle ACB = \angle QRP$ (दिया है)

$\therefore \angle QRP = \angle QRS$

पर यह तब तक असम्भव है जब तक किरण RS किरण RP के साथ संपाती न हो जाए अर्थात् S, P के साथ संपाती न हो जाए।

$\therefore AB = PQ$

अत: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

स्थिति III :यदि मान लें कि $AB > PQ$ हो, तो ऊपर दिए गए तर्क से सिद्ध कर सकते हैं कि

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

अत: सभी स्थितियों में, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

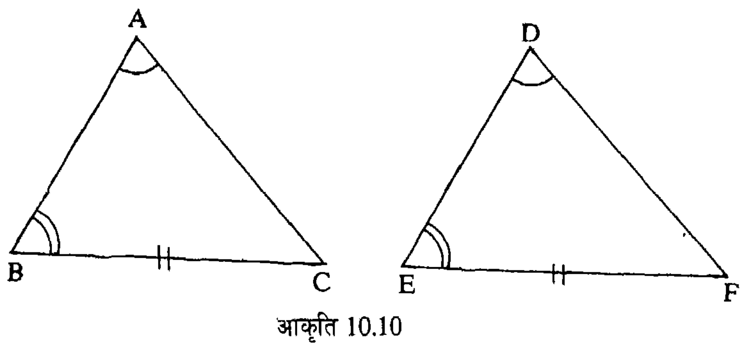
उप-प्रमेय (को-को-भु सर्वांगसमता कसौटी)

यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा (जो कोणों के अंतरित न हों) क्रमशः दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों और भुजा के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

दिया है : ΔABC और ΔDEF में, (आकृति 10.10)

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $BC = EF$

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



आकृति 10.10

उपपत्ति : क्योंकि त्रिभुज के कोणों का योगफल $180°$ होता है, इसलिए

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$

परन्तु $\angle A = \angle D$

और $\angle B = \angle E$

$\therefore \angle C = \angle F$ (1)

अब ΔABC और ΔDEF में

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

$\angle C = \angle F$ [(1) से]

$BC = EF$ (दिया है)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (को-भु-को सर्वांगसम प्रमेय)

को-को-भुजा सर्वांगसम कसौटी (को-को-भु स० क०) का प्रयोग करके अब हम प्रमेय 10.1 का विलोम सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 10.3 : *यदि त्रिभुज के दो कोण बराबर हों, तो उनकी सम्मुख भुजाएं भी बराबर होती हैं।*

दिया है : ΔABC में, $\angle C = \angle B$ (आकृति 10.11)

सिद्ध करना है : $AB = AC$

रचना : $\angle A$ का समद्विभाजक खींचिए और मान लीजिए कि यह BC को बिंदु D पर मिलता है।

उपपत्ति : ΔABD और ΔACD में,

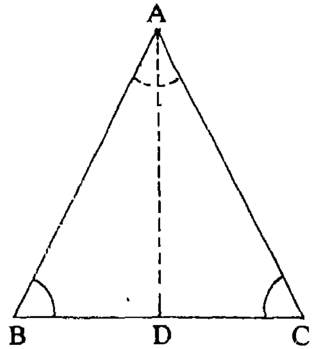
$\angle B = \angle C$ (दिया है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (रचना)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (को-को-भु स० क०)

अतः $AB = AC$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)



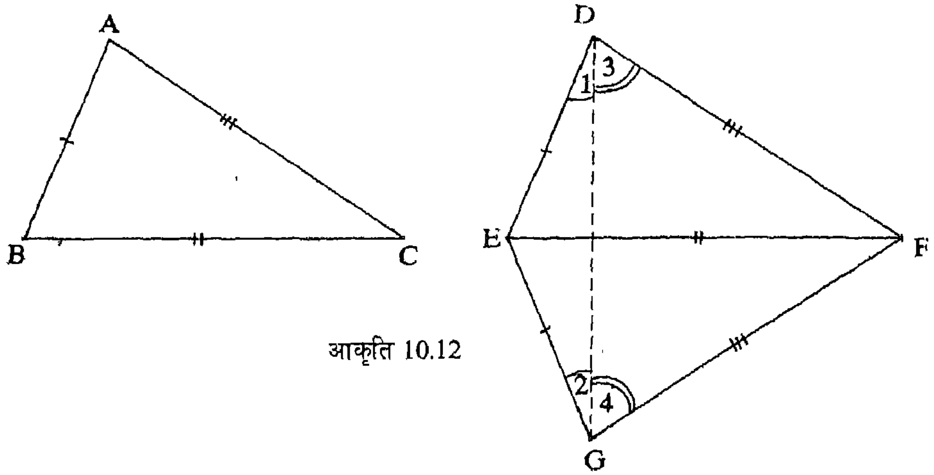
आकृति 10.11

हमने ऊपर देखा है, कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, को-भु-को-स० कसौटी, एक भुजा से सम्बद्ध है; और भु-को-भु स० कसौटी, दो भुजाओं से सम्बद्ध है। अब हम एक ऐसी कसौटी देते हैं जिसका त्रिभुजों की सभी तीनों भुजाओं से सम्बद्ध है।

प्रमेय 10.4 : भु-भु-भु (भुजा-भुजा-भुजा) सर्वांगसमता प्रमेय

यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएं, दूसरे त्रिभुज की क्रमशः तीन भुजाओं के बराबर हों, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

दिया है : ΔABC और ΔDEF में,



आकृति 10.12

$AB = DE$

$BC = EF$

$AC = DF$

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

रचना : मान लीजिए BC सब से लम्बी भुजा है। रेखाखण्ड EG इस प्रकार खींचिए कि $EG = AB$ हो। (आकृति 10.12)

और $\angle FEG = \angle CBA$

GF और DG को मिलाइए।

उपपत्ति : ΔABC और ΔGEF में,

$AB = GE$ (रचना)

$\angle ABC = \angle GEF$ (रचना)

$BC = EF$ (दिया है)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta GEF$ (भु-को-भु स० अभिगृहीत)

$\therefore \angle A = \angle G$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) ... (1)

और $AC = GF$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) ... (2)

अब, $AB = EG$ (रचना)

$AB = DE$ (दिया है)

$\therefore DE = EG$ ... (3)

इसी प्रकार, $DF = GF$ ... (4)

ΔEDG में,

$DE = EG$ (ऊपर सिद्ध किया)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) ... (5)

ΔDFG में,

$FD = FG$ (ऊपर सिद्ध किया)

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) ... (6)

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ [(5) और (6) से]

$\therefore \angle D = \angle G$ ...(7)

लेकिन $\angle G = \angle A$ [(1) से]

$\therefore \angle A = \angle D.$ ...(8)

अब ΔABC और ΔDEF में,

$AB = DE$ (दिया है)

$AC = DF$ (दिया है)

$\angle A = \angle D$ [(8) से]

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (भु-को-भु स० अभिगृहीत)

प्रमेय 10.5 स-क-भु (समकोण-कर्ण-भुजा) सर्वांगसमता प्रमेय

यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा, दूसरे समकोण त्रिभुज के क्रमशः कर्ण और संगत भुजा के बराबर हो, तो वे समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

दिया है : ΔABC और ΔDEF में, (आकृति 10.13)

$\angle B = \angle E = 90°$

$AC = DF$

$BC = EF$

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

रचना : DE को M तक बढ़ाइए जिससे कि $AB = EM$ हो।

MF को मिलाइए।

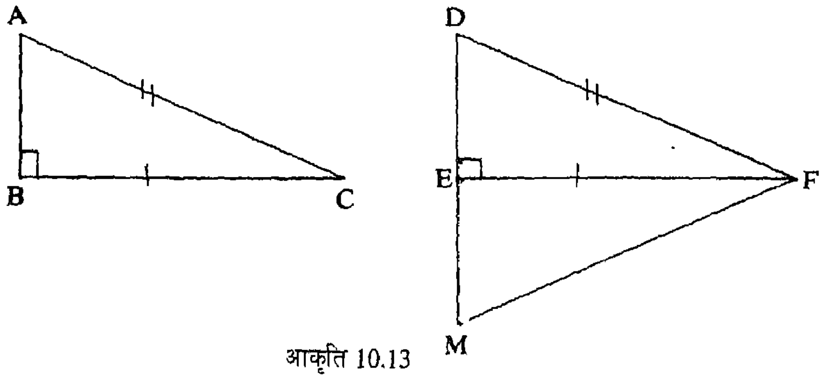
उपपत्ति : ΔABC और ΔMEF में,

$AB = ME$ (रचना)

$BC = EF$ (दिया है)

$\angle B = \angle E$ (प्रत्येक 90°)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta MEF$ (भु-को-भु स० अभिगृहीत)



आकृति 10.13

अत: $\angle A = \angle M$ ... (1)

और $AC = MF$ ... (2)

किन्तु $AC = DF$ (दिया है)

$\therefore MF = DF$

$\therefore \angle M = \angle F$ (Δ DFM में, $MF = DF$) ...(3)

(1) और (3) से

$\angle A = \angle D$ ... (4)

अब Δ ABC और Δ DEF में,

$\angle A = \angle D$ [(4) से]

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

$\therefore \angle C = \angle F$ ... (5)

पुन: Δ ABC और Δ DEF में,

$BC = EF$ (दिया है)

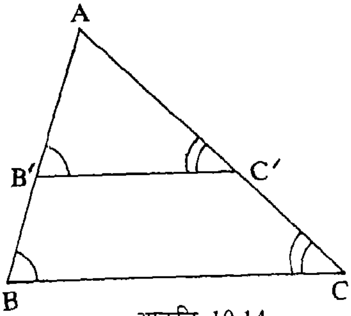
$AC = DF$ (दिया है)

$\angle C = \angle F$ [(5) से]

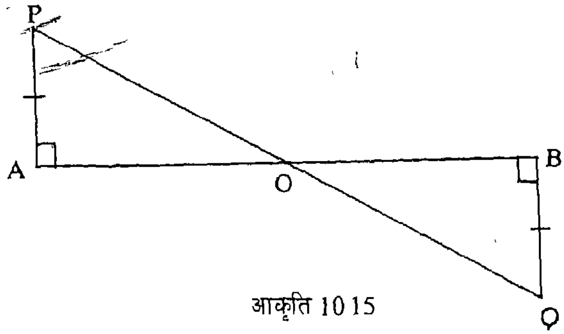
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (भु-को-भु स० अभिगृहीत)

टिप्पणी : दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए जिन स्थितियों का हम ने अब तक अध्ययन किया है उनका संबंध दो भुजाओं और एक कोण से या एक भुजा और दो कोणों से या तीन भुजाओं से था। हम उस स्थिति के बारे में क्या कहेंगे, जिसका संबंध तीनों कोणों की सर्वांगसमता से हो। अर्थात्, यदि एक त्रिभुज के तीन कोण दूसरे त्रिभुज के क्रमश: तीन कोणों के बराबर हों तो क्या वे त्रिभुज सर्वांगसम होंगे?

आकृति 10.14 लीजिए, जिसमें $B'C' \parallel BC$, जैसा कि स्पष्ट है, $\angle B$ और $\angle B'$ बराबर हैं (संगत कोण) और $\angle C$ और $\angle C'$ बराबर हैं। इस प्रकार Δ $AB'C'$ के तीनों कोण क्रमश: Δ ABC के तीनों



आकृति 10.14



आकृति 10.15

कोणों के बराबर हैं। परन्तु यह तो स्पष्ट है कि $\Delta AB'C'$, ΔABC के सर्वांगसम नहीं है, अतः यह याद रहे कि त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए को-को-को जैसी कोई कसौटी नहीं है।

उदाहरण 10.4 : आकृति 10.15 में, AP और BQ, रेखा खण्ड AB पर लम्ब हैं और $AP = BQ$, है। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु O, AB और PQ, दोनों का मध्य बिन्दु है।

उपपत्ति : त्रिभुजों AOP और BOQ में,

$AP = BQ$ (दिया है)

$\angle A = \angle B$ (प्रत्येक $90°$)

$\angle AOP = \angle BOQ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

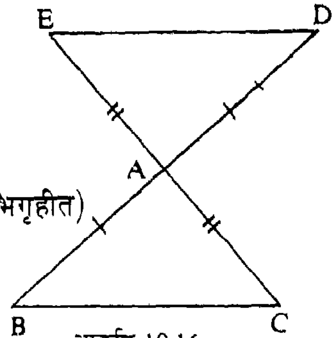
$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOQ$ (को-को-भु सर्वांगसम कसौटी)

अतः $AO = OB$

और $PO = QO$

$\therefore O$, AP और PQ दोनों का मध्य बिन्दु है।

उदाहरण 10.5 : आकृति 10.16 में, भुजाएं BA और CA इस प्रकार बढ़ाई गई हैं कि $BA = AD$ और $CA = AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $DE \parallel CB$



आकृति 10.16

उपपत्ति : त्रिभुजों ABC और ADE में,

$AB = AD$ (दिया है)

$AC = AE$ (दिया है)

$\angle BAC = \angle DAE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

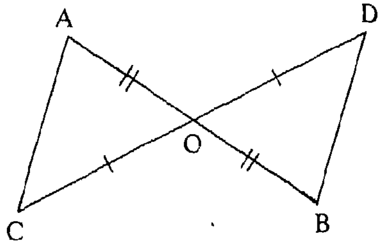
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADE$ (भु-को-भु सर्वांगसम अभिगृहीत)

अतः $\angle ABC = \angle ADE$

इस प्रकार, तिर्यक रेखा BD, रेखाओं BC और DE के साथ समान एकान्तर अन्तः कोण बनाती है।

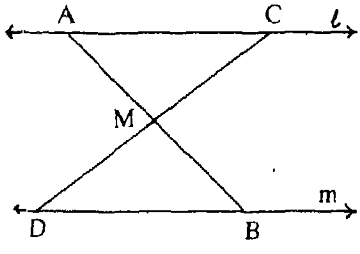
अतः $DE \parallel CB$

प्रश्नावली 10.1

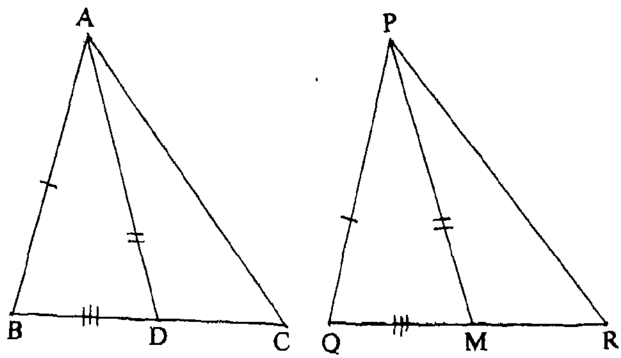


आकृति 10.17

1. दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज की एक भुजा और एक न्यूनकोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा और कोण के बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज सर्वांगसम हैं।
2. आकृति 10.17 में, बिन्दु O, AB और CD दोनों का मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि $AC = BD$ और $AC \parallel BD$
3. AB एक रेखाखण्ड है। रेखा AB के विपरीत पक्षों में AX और BY समान लम्बाई के ऐसे दो रेखाखण्ड खींचे गए है कि $AX \parallel BY$ है। यदि रेखाखण्ड AB और XY परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करें तो सिद्ध कीजिए कि
   (i) $\Delta APX \cong \Delta BPY$ और
   (ii) रेखाखण्ड AB और XY, बिन्दु P पर परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
4. आकृति 10.18 में, $l \parallel m$ और M, रेखाखण्ड AB का मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि यदि CD कोई अन्य रेखाखण्ड हो, जिसके सिरे C और D क्रमशः रेखाओं l और m पर हों, तो M रेखाखण्ड CD का भी मध्य बिन्दु होगा।



आकृति 10.18

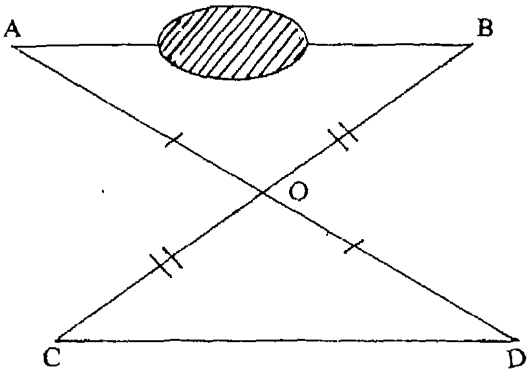


आकृति 10.19

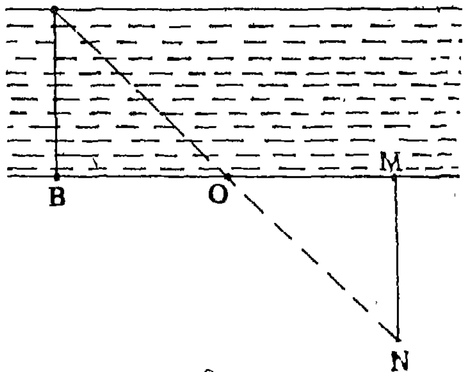
5. मान लीजिए रेखाखण्ड AB और CD बिन्दु O पर परस्पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $AO = OD$ और $OB = OC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC = BD$ लेकिन यहाँ यह आवश्यक नहीं कि AC और BD समांतर हों।
6. आकृति 10.19 में, त्रिभुज ABC की दो भुजाएं AB और BC और माध्यिका AD,

क्रमशः त्रिभुज PQR की भुजाओ PQ और QR और माध्यिका PM के बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC और PQR सर्वांगसम हैं।

7. राम दो वस्तुओं A और B के बीच की दूरी मालूम करना चाहता है; परन्तु इन दोनों वस्तुओं के बीच एक रूकावट है (जैसा कि आकृति 10.20 में, दिखाया गया है), जिसके कारण वह यह दूरी सीधे नाप कर ज्ञात नही कर सकता है।



आकृति 10.20



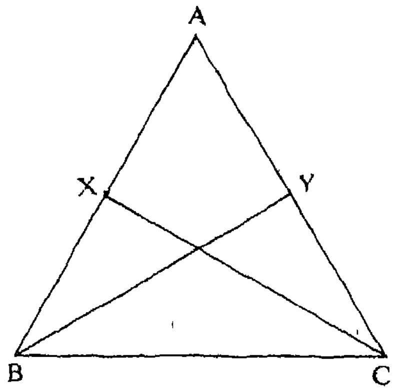
आकृति 10.21

इस कठिनाई को दूर करने के लिए वह एक चातुर्य विधि का प्रयोग करता है। पहले वह एक बिन्दु O ऐसा लेता है जिस से कि A और B दोनों दिखाई दें और वहां एक खम्बा स्थापित करता है। फिर रेखा AO की सीध में वह एक बिन्दु D पर खम्बा इस तरह स्थापित करता है, जिससे कि $AO = OD$। इसी प्रकार, वह एक तीसरा खम्बा बिन्दु C पर स्थापित करता है, जिससे कि $BO = OC$। तब वह CD को नापता है और देखता है कि $CD = 170$ मी। सिद्ध कीजिए कि A और B के बीच की दूरी भी 170 मी है।

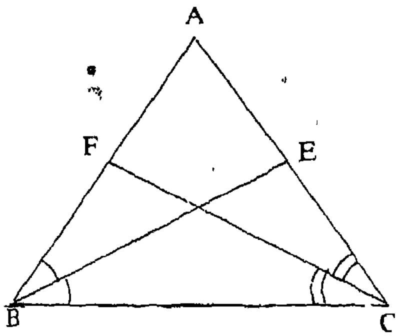
8. आकृति 10.21 से व्याख्या कीजिए कि नदी को पार किए बिना हम उसकी चौडाई कैसे ज्ञात कर सकते हैं।

9. आकृति 10.22 में ΔABC की समान भुजाओं AB और AC पर बिन्दु X और Y ऐसे है कि $AX = AY$ है। सिद्ध कीजिए कि $XC = BY$

10. सिद्ध कीजिए कि ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज होगा, यदि निम्नलिखित में से कोई एक स्थिति लागू होती हो:
    (i) शीर्ष-लम्ब AD, भुजा BC का समद्विभाजक है,
    (ii) माध्यिका AD, भुजा BC पर लम्ब है,
    (iii) $\angle BAC$ का समद्विभाजक, भुजा BC पर लम्ब है,
    (iv) शीर्ष-लम्ब AD, कोण BAC का समद्विभाजक है,
    (v) शीर्षलम्ब $BE =$ शीर्षलम्ब CF

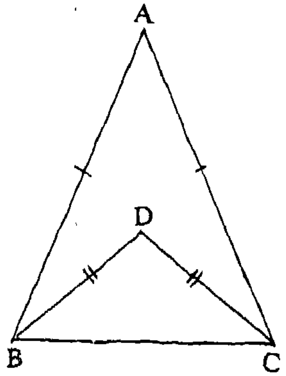


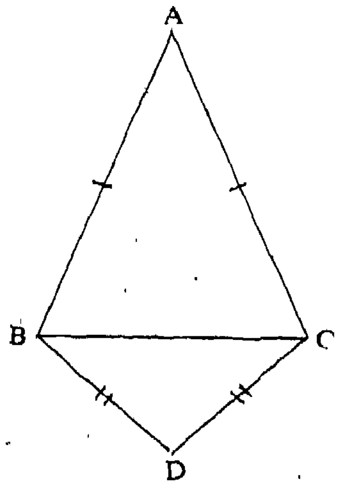
आकृति 10.22



आकृति 10.23

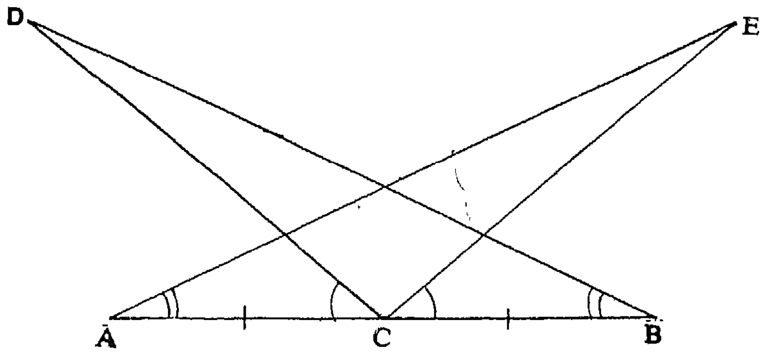
11. आकृति 10.23 में, ΔABC में, $AB = AC$, BE और CF क्रमशः $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta EBC \cong \Delta FCB$
12. आकृति 10.24 में, $AB = AC$ और $PB = DC$ है। सिद्ध कीजिए कि $\angle ABD = \angle ACD$





आकृति 10.24

13. ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। भुजा BA को D तक इस तरह बढ़ाया गया है कि $AB = AD$। सिद्ध कीजिए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।
14. आकृति 10.25 में, $AC = BC$, $\angle DCA = \angle ECB$ और $\angle DBC = \angle EAC$। सिद्ध कीजिए कि ΔDBC और ΔEAC सर्वांगसम हैं और $DC = EC$

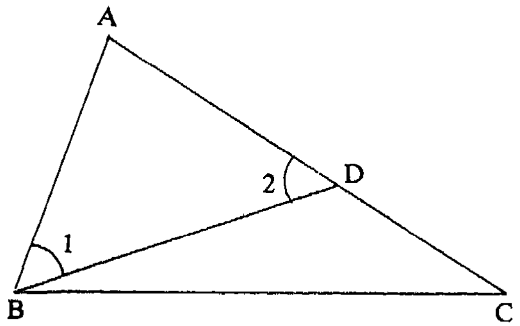


आकृति 10.25

10.4 त्रिभुज में कुछ असमिका सम्बन्ध

अब हम त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के कुछ असमिका सम्बन्धों पर विचार करेंगे।

प्रमेय 10.6 : *यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएं बराबर न हों, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा होगा।*



आकृति 10.26

दिया है : ΔABC में, $AC > AB$ (आकृति 10.26)

सिद्ध करना है : $\angle ABC > \angle ACB$

रचना : भुजा AC पर बिन्दु D ऐसा लीजिए कि $AB = AD$ हो। BD को मिलाइए।

उपपत्ति : ΔABD में,

$AB = AD$ (रचना)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (समान भुजा के सम्मुख कोण) ...(1)

परन्तु $\angle 2$, ΔBCD का बहिष्कोण है

$\therefore \angle 2 > \angle ACB$ (बहिष्कोण प्रमेय) ... (2)

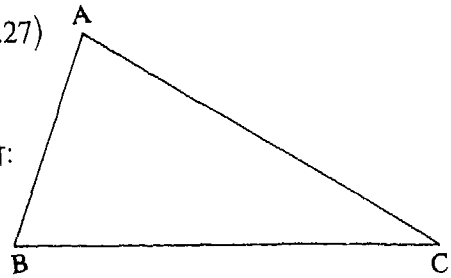
(1) और (2) से

$\angle 1 > \angle ACB$

परन्तु $\angle ABC > \angle 1$ (रचना)

$\therefore \angle ABC > \angle ACB$

प्रमेय 10.7 : (प्रमेय 10.6 का विलोम) : *यदि किसी त्रिभुज के दो कोण असमान हों, तो बड़े कोण के सामने की भुजा बडी होगी।*



आकृति 10.27

दिया है : ΔABC में $\angle ABC > \angle ACB$ (आकृति 10.27)

सिद्ध करना है : $AC > AB$

उपपत्ति : ΔABC में, AB और AC के लिए तीन संभावनाएं हैं; जिनमें केवल एक ही सही होगी:

(i) $AC = AB$ (ii) $AC < AB$

(iii) $AC > AB$

स्थिति (i) यदि $AC = AB$, तो $\angle ABC = \angle ACB$, जो दिये गये तथ्यों का विरोध करता है।

$\therefore AC \neq AB$

स्थिति (ii) यदि $AC < AB$, तो क्योंकि बड़ी भुजा के सम्मुख बड़ा कोण होता है;

$\therefore \angle ACB > \angle ABC$

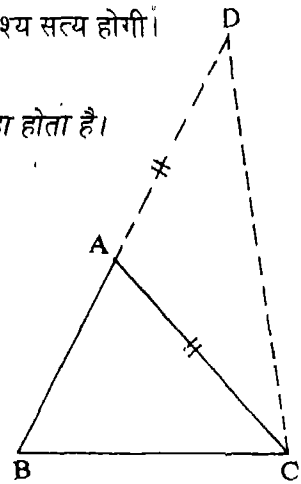
यह भी दिये गये तथ्यों का विरोध करता है।

स्थिति (iii) $AC > AB$

केवल यही संभावना हमारे पास शेष है, अतः यह अवश्य सत्य होगी।

$\therefore AC > AB$

प्रमेय 10.8 : *किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।*



आकृति 10.28

दिया है : ΔABC (आकृति 10.28)

सिद्ध करना है : $AB + AC > BC$,

$AB + BC > AC$

और $BC + AC > AB$

रचना : भुजा BA, को D तक बढ़ाइए जिससे कि $AD = AC$ हो। CD को मिलाइए।

उपपत्ति : ΔACD में, $AC = AD$

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\therefore \angle ACD + \angle BCA > \angle ADC$ (रचना)

वा $\angle BCD > \angle BDC$ ... (1)

अब, ΔBDC में,

$\angle BCD > \angle BDC$

$\therefore BD > BC$ (बड़े कोण की सम्मुख भुजा) ... (2)

परन्तु $BD = BA + AD$

$= BA + AC$ (रचना)

(2) और (3) से

$\therefore BA + AC > BC$ ... (3)

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$AB + BC > AC$

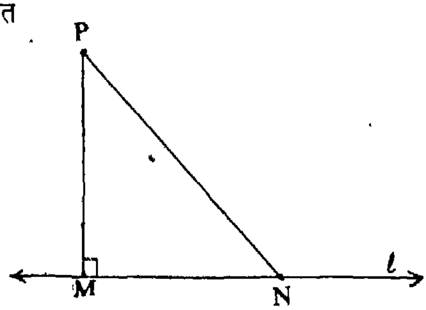
और $BC + AC > AB$

प्रमेय 10.9 : *एक दी हुई रेखा पर एक बिन्दु से जो इस रेखा पर स्थित नहीं है, डाले गए सभी रेखाखण्डों में लांबिक रेखाखण्ड सबसे छोटा होता है।*

दिया है : l एक रेखा है और P एक बिन्दु जो l पर स्थित नहीं है। (आकृति 10.29)

$PM \perp l$

N रेखा l पर, M से भिन्न कोई बिन्दु है।



आकृति 10.29

सिद्ध करना है : $PM < PN$

उपपत्ति : ΔPMN में,

$\angle M = 1$ समकोण (दिया है)

$\therefore \angle N$ न्यून कोण है। (त्रिभुज का कोण योग गुणधर्म)

$\therefore \angle M > \angle N$

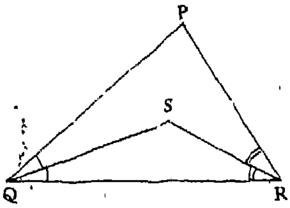
अतः $PN > PM$ (बड़े कोण की सम्मुख भुजा)

या $PM < PN$

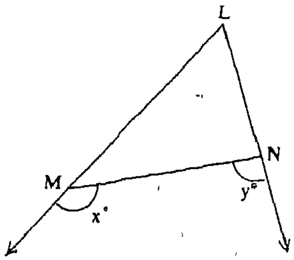
परिभाषा : *किसी रेखा और उसके बाहर स्थित किसी बिन्दु के बीच की दूरी, उस बिन्दु से उस रेखा से डाले गए लांबिक रेखाखण्ड की लम्बाई होती है। किसी रेखा और उस रेखा पर स्थित एक बिन्दु के बीच की दूरी शून्य होती है।*

प्रश्नावली 10.2

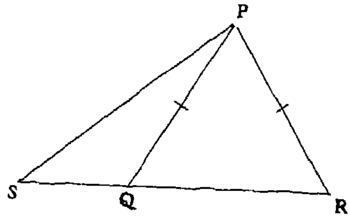
1. आकृति 10.30 में, $PQ > PR$ है। QS और RS, क्रमशः $\angle Q$ और $\angle R$ के समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए : $SQ > SR$



आकृति 10.30

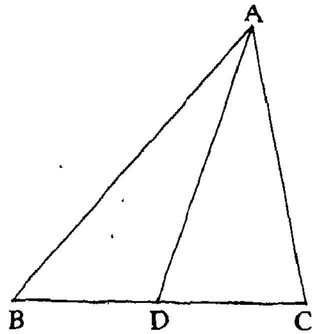


आकृति 10.31

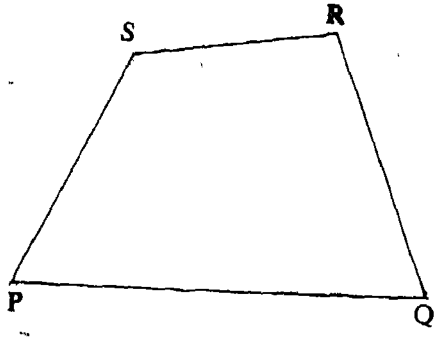


आकृति 10.32

2. आकृति 10.31 में, $x > y$ है। दिखाइए कि $LM > LN$
3. आकृति 10.32 में $PQ = PR$ है। दिखाइए कि $PS > PQ$
4. आकृति 10.33 में, $AB > AC$ है। दिखाइए कि $AB > AD$
5. सिद्ध कीजिए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सब से बड़ी भुजा होती है।

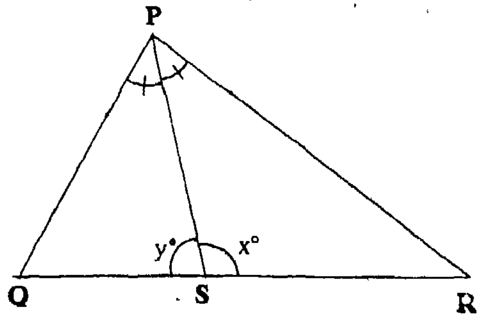


आकृति 10.33

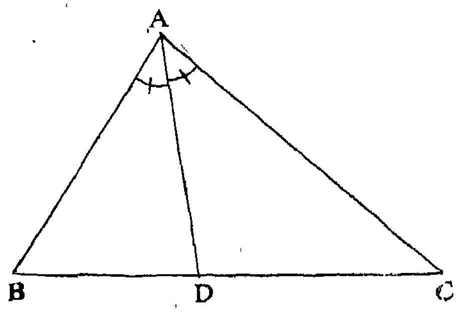


आकृति 10.34

6. आकृति 10.34 में, $PQRS$ एक चतुर्भुज है। PQ इस की सब से बड़ी भुजा है और RS इस की सब से छोटी। सिद्ध कीजिए कि $\angle R > \angle P$ और $\angle S > \angle Q$
[**संकेत** : PR को मिलाइए और फिर QS को मिलाइए।]
7. आकृति 10.35 में, $PR > PQ$ और PS, $\angle P$ का समद्विभाजक है। दिखाइए कि $x > y$

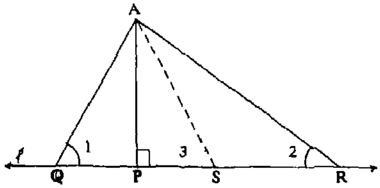


आकृति 10.35



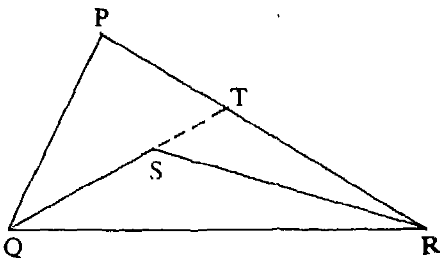
आकृति 10.36

8. आकृति 10.36 में, AD, कोण A का समद्विभाजक है। दिखाइए कि $AB > BD$
9. आकृति 10.37 में, $AP \perp l$ और $PR > PQ$। दिखाइए कि $AR > AQ$
[**संकेत** : AS खींचिए, जहां $PS = PQ$। तब दिखाइए कि $\angle 3 > \angle 2$]

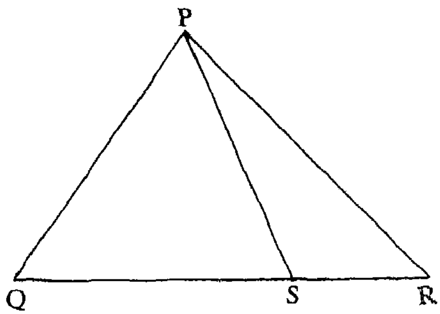


आकृति 10.37

10. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज के तीन शीर्ष-लम्बों का योगफल, उसकी तीनों भुजाओं के योगफल से कम होता है।
11. आकृति 10.38 में, $\Delta\ PQR$ और उसके अभ्यंतर में S कोई बिन्दु है। दिखाइए कि $SQ + SR < PQ + PR$
[**संकेत** : QS को इतना बढ़ाइए कि वह PR को T पर मिले।]



आकृति 10.38



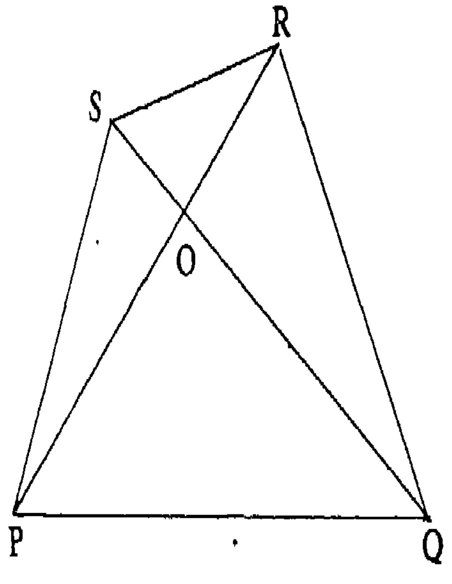
आकृति 10.39

12. ΔPQR (आकृति 10.39) में, भुजा QR पर S कोई बिन्दु है। दिखाइए कि $PQ + QR + RP > 2\, PS$

13. आकृति 10.40 में, $PQRS$ एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण PR और QS बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दिखाइए कि

    (i) $PQ + QR + RS + SP > PR + QS$, और

    (ii) $PQ + QR + RS + SP < 2\,(PR + QS)$



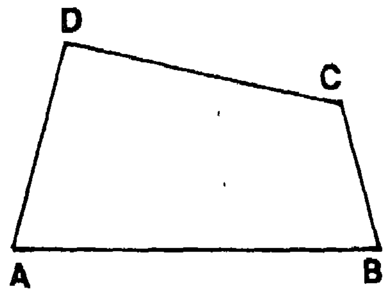
आकृति 10.40

अध्याय 11

समांतरचतुर्भुज

11.1 चतुर्भुज

चतुर्भुज और उसके शीर्ष, भुजाओं, कोणों और विकर्णों की परिभाषा हम पहले दे चुके हैं। आकृति 11.1 में *A, B, C* और *D* शीर्ष वाला एक चतुर्भुज है। इसे प्रतीक 'चतुर्भुज *ABCD*' या '□*ABCD*' से प्रकट करते हैं।



आकृति 11.1

चार रेखाखण्ड *AB, BC, CD* और *DA* इसकी भुजाएं और चार कोण $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ इसके कोण हैं। दो रेखा खण्ड *AC* और *BD* (दिखाए गए हों, अथवा नहीं) इसके दो *विकर्ण* कहलाते हैं।

हमने पहले, चतुर्भुज के एक महत्वपूर्ण गुणधर्म का कथन दिया है और इसे सिद्ध किया है। वह गुणधर्म है : चतुर्भुज के चार कोणों का योगफल 360° या 4 समकोण होता है। इस गुणधर्म को सिद्ध करने के लिए, हमने त्रिभुज के संगत गुणधर्म का प्रयोग किया था। चतुर्भुज या बहुभुजों के गुणधर्मो के अध्ययन के लिए, त्रिभुज के अधारभूत गुणधर्म की जानकारी आवश्यक है।

इस अध्याय में, हम कुछ विशेष प्रकार के चतुर्भुज, जैसे समलम्ब, समांतरचतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत और वर्ग को परिभाषित करेंगे और उनके कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मो पर विचार करेंगे।

प्रारंभ में, हम चतुर्भुज के भुजा-युग्मों और कोणों से सम्बद्ध कुछ नामों का प्रयोग करेंगे। ये नाम इन विशेष प्रकार के चतुर्भुजों के गुणधर्मों का ठीक-ठीक कथन देने में सहायक होते हैं।

11.1.1 चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं, क्रमागत भुजाएं, सम्मुख कोण तथा क्रमागत कोण

परिभाषा 1 : *चतुर्भुज की वे दो भुजाएं, जिन का कोई उभयनिष्ठ बिन्दु न हो, सम्मुख भुजाएं कहलाती हैं।*

परिभाषा 2 : *चतुर्भुज की वे दो भुजाएं, जिन का एक उभयनिष्ठ अंत्य बिन्दु (end-point) हो, क्रमागत भुजाएं कहलाती हैं।*

परिभाषा 3 : *चतुर्भुज के वे दो कोण, जिनको अंतरित करने वाली भुजाओं में कोई भुजा सर्वनिष्ठ न हो, सम्मुख कोण कहलाते हैं।*

परिभाषा 4 : *चतुर्भुज के वे दो कोण, जिनको अंतरित करने वाली भुजाओं में एक भुजा सर्वनिष्ठ हो, क्रमागत कोण कहलाते हैं।*

आकृति 11.1 के चतुर्भुज $ABCD$ में

(1) AB, CD दो सम्मुख भुजाओं का एक युग्म है। AD, BC सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म है।

(2) AB, BC क्रमागत भुजाओं का एक युग्म है। $BC, CD; CD, DA$ और DA, AB क्रमागत भुजाओं के अन्य तीन युग्म हैं।

(3) $\angle A, \angle C$ सम्मुख कोणों का एक युग्म है। $\angle B, \angle D$ सम्मुख कोणों का दूसरा युग्म है।

(4) $\angle A, \angle B,$ क्रमागत कोणों का एक युग्म है। $\angle B, \angle C; \angle C, \angle D$ और $\angle D, \angle A,$ क्रमागत कोणों के अन्य तीन युग्म हैं।

11.1.2 समलम्ब और समांतरचतुर्भुज

परिभाषा : *उस चतुर्भुज को समलम्ब (trapezium) कहते हैं जिसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर समांतर हो।*

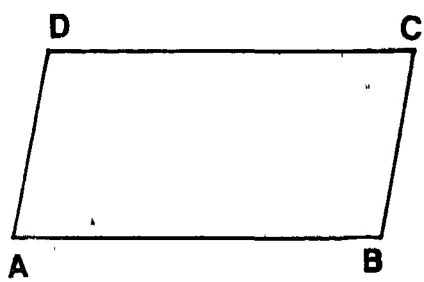
परिभाषा : *उस चतुर्भुज को समांतरचतुर्भुज (parallelogram) कहते हैं जिसकी सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म परस्पर समांतर हो।*

ध्यान दीजिए कि यदि सभी समांतरचतुर्भजों के समुच्चय को P से, सभी समलम्ब चतुर्भुजों के समुच्चय को T से और सभी चतुर्भुजों के समुच्चय को Q से प्रकट करें तो

$$P \subset T \subset Q$$

टिप्पणी : साधारणतया, समलम्ब उस चतुर्भुज को कहते हैं जिसमें सम्मुख भुजाओं का केवल एक ही युग्म समांतर हो।

11.2. समांतरचतुर्भुज के गुणधर्म : आकृति 11.2 में, $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है, क्योंकि $AB \parallel DC$ और $BC \parallel AD$। हम समांतरचतुर्भुज को प्रतीक $\parallel^{gm}$ $ABCD$ से प्रकट करेंगे।



माप कर तथा जांच कर, आप समांतरचतुर्भुज के कुछ गुणधर्मों से परिचित हो चुके हैं। आपको याद होगा कि समांतरचतुर्भुज में

(i) सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

(ii) सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

(iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

इन तथ्यों की पुष्टि के लिए, हम इन में से प्रत्येक गुणधर्म को सिद्ध करना चाहेंगे।

यह सिद्ध करने के लिए कि $AB = CD$ और $AD = BC$, हम ऐसे दो त्रिभुज लेंगे जिनकी भुजाएं ये रेखा खण्ड हैं। थोडा सोचने पर हम यह जान सकते हैं कि हमें AC को मिलाना चाहिये। तब हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\Delta ACB \cong \Delta CAD$ इत्यादि।

इसी प्रकार यह सिद्ध करने के लिए कि विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं, यह मानते हुए कि विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं और इनसे चार त्रिभुज प्राप्त होते हैं; हम इनमें से केवल दो त्रिभुजों को लेकर यह सिद्ध करेंगे कि ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

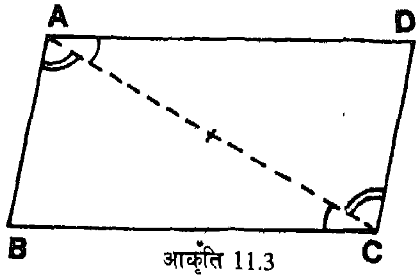
परिमेय 11.1 (क) :

समांतरचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं।

दिया है : $\square ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है।

सिद्ध करना है : $AB = CD$ और $AD = CB$

रचना : AC को मिलाइए। (आकृति 11.3)



आकृति 11.3

उपपत्ति : त्रिभुजों ADC और CBA में,

$\angle DAC = \angle BCA$ (एकान्तर अंतः कोण, $AD \parallel BC$)

$AC = CA$ (उभयनिष्ठ)

$\angle DCA = \angle BAC$ (एकान्तर अतः कोण, $AB \parallel DC$)

$\therefore \Delta ADC \cong \Delta CBA$ (कोण-भुजा-कोंण सर्वांगसम प्रमेय)

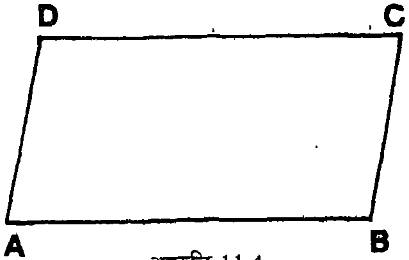
$\therefore AD = CB$ और $DC = BA$

प्रमेय 11.1 (ख) :

समांतरचतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

दिया है : $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है। (आकृति 11.4)

सिद्ध करना है : $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$



आकृति 11.4

उपपत्ति : क्योंकि $AB \parallel DC$ और AD उनको प्रतिच्छेदित करता है।

$\therefore \angle A + \angle D = 180°$ (क्रमागत अंतः कोण) ... (1)

क्योंकि $AD \parallel BC$ और DC उनको प्रतिच्छेदित करता है।

$\therefore \angle D + \angle C = 180^0$ (क्रमागत अंतः कोण) ... (2)

(1) और (2) से,

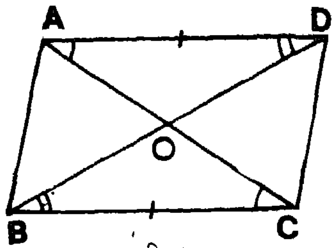
$\angle A + \angle D = \angle D + \angle C$

$\therefore \angle A = \angle C$

इसी प्रकार, $\angle B = \angle D$

प्रमेय 11.1 (ग) :

समांतरचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



आकृति 11.5

दिया है : $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है। विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर परस्पर प्रतिच्छेदित करते हैं। (आकृति 11.15)

सिद्ध करना है : $OA = OC$ और $OB = OD$।

उपपत्ति : त्रिभुजों AOD और COB में,

$\angle DAO = \angle BCO$ (एकान्तर अंतः कोण, $AD \parallel BC$)

$AD = BC$ ($\parallel^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

$\angle ADO = \angle CBO$ (एकान्तर अतः कोण, $AD \parallel BC$)

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta COB$ (कोण-भुजा-कोण स० प्र०)

$\therefore AO = CO$ और $OD = OB$

संक्षेप में :

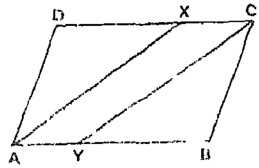
प्रमेय 11.1 : समांतरचतुर्भुज में

(क) सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं,

(ख) सम्मुख कोण बराबर होते हैं और

(ग) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

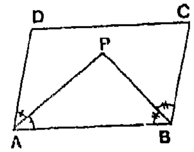
प्रश्नावली 11.1



आकृति 11.6

1. $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है, और रेखाखण्ड AX और CY क्रमशः $\angle A$ और $\angle C$ को समद्विभाजित करते हैं। (आकृति 11.6) दिखाइए कि $AX \parallel CY$

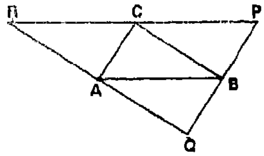
2. समांतरचतुर्भुज $ABCD$ में, क्रमागत कोण A और B के समद्विभाजक परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। (आकृति 11.7) सिद्ध कीजिए कि $\angle APB = 90°$



आकृति 11.7

3. यदि समांतरचतुर्भुज का एक विकर्ण, उसके एक कोण को समद्विभाजित करता हो तो वह दूसरे कोण को भी समद्विभाजित करेगा और तब दोनों विकर्ण एक दूसरे पर लम्ब होंगे।

4. दिए हुए त्रिभुज ABC में A, B और C से होती हुई रेखाएं खींची गई हैं जो क्रमशः BC, CA और AB के समांतर हैं और जिनसे ΔPQR प्राप्त होता है। (आकृति 11.8) दिखाइए कि $BC = \frac{1}{2}\ QR$

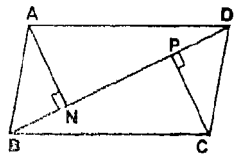


आकृति 11.8

5. आकृति 11.9 में, समांतरचतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण BD पर, AN और CP लम्ब हैं। सिद्ध कीजिए कि

    (i) $\Delta\ ADN \cong \Delta\ CBP$ और

    (ii) $AN = CP$



आकृति 11.9

11.3 चतुर्भुज का समांतरचतुर्भुज होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध

पहले सिद्ध किए गए तीन प्रमेयों में से एक के परिणाम को हम इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

यदि एक चतुर्भुज, समांतरचतुर्भुज हो, तो इसकी सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं।

इसका विलोम क्या होगा? निस्सन्देह, वह चतुर्भुज ही है जिस पर हम विचार कर रहे हैं। हमारा कथन यह हो सकता है:

यदि चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म बराबर हों, तो चतुर्भुज एक समांतरचतुर्भुज होता है।

किसी चतुर्भुज का समांतरचतुर्भुज होने के लिए उसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों का बराबर होना पर्याप्त प्रतिबंध होगा जबकि इस प्रतिबंध को एक प्रमेय के रूप में सिद्ध किया जा सकता है। इसी प्रकार आप दो और पर्याप्त प्रतिबंध निर्धारित कर सकते हैं:

यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हो, तो चतुर्भुज, समांतरचतुर्भुज होता है।

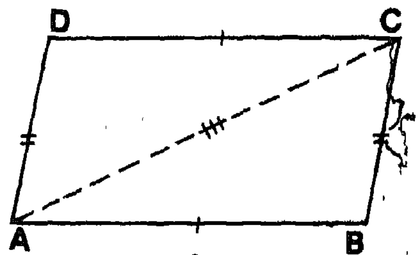
यदि किसी चतुर्भुज के सममुख कोण बराबर हों, तो चतुर्भुज, समांतरचतुर्भुज होता है।

एक अन्य महत्वपूर्ण प्रतिबंध निम्नलिखित है:

यदि चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं का कोई एक युग्म परस्पर समांतर और बराबर हो, तो चतुर्भुज समांतरचतुर्भुज होता है।

ऊपर के प्रतिबंधों में से प्रत्येक प्रतिबंध चतुर्भुज के समांतर चतुर्भुज होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध है। अब हम इन प्रतिबंधों को प्रमेयों के रूप में सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 11.2 (क) (प्रमेय 11.1 (क) का विलोम) :
एक चतुर्भुज समांतरचतुर्भुज होता है, यदि इसकी सम्मुख भुजाएं परस्पर बराबर हों।



आकृति 11.10

दिया है : चतुर्भुज $ABCD$, जिसमें
$AB = CD$ और $BC = DA$
(आकृति 11.10)

सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है।

रचना : AC को मिलाइए।

उपपत्ति : त्रिभुजों ACB और CAD में

$AC = CA$ (उभयनिष्ठ)

$CB = AD$ (दिया है)

$AB = CD$ (दिया है)

$\therefore \Delta ACB \cong \Delta CAD$ (भुजा-भुजा-भुजा स० प्र०)

अतः $\angle CAB = \angle ACD$ ... (1)

और $\angle ACB = \angle CAD$ ... (2)

अब रेखा AC, रेखाओं AB और DC को क्रमशः बिन्दुओं A और C पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है, कि एकांतर अंतः कोण

$\angle CAB = \angle ACD$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\therefore AB \parallel DC$ ... (3)

इसी प्रकार, रेखा AC, रेखाओं BC और AD को क्रमशः C और A पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि, एकांतर अंतः कोण

$\angle ACB = \angle CAD$

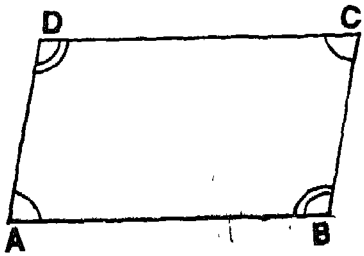
$\therefore BC \parallel AD$ ... (4)

अतः (3) और (4) से

$ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रमेय 11.2 (ख)– (प्रमेय 11.1 (ख) का विलोम)

एक चतुर्भुज, समांतरचतुर्भुज होता है, यदि उसके सम्मुख कोण परस्पर बराबर हों।



आकृति 11.11

दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ में
$\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$
(आकृति 11.11)

सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है।

उपपत्ति : चतुर्भुज $ABCD$ में,

$\angle A = \angle C$ (दिया है) ... (1)

$\angle B = \angle D$ (दिया है) ... (2)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ ... (3)

और $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$. (चतुर्भुज के कोण) ... (4)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$ ... (5)

अब, रेखा AB, रेखाओं AD और BC को क्रमशः बिन्दु A और B पर इस प्रकार प्रतिच्छेदित करती है कि क्रमागत अंतः कोण

$\angle A + \angle B = 180^\circ$

$\therefore AD \parallel BC$ ... (6)

इसी प्रकार, (1) और (2) से

$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180^0$

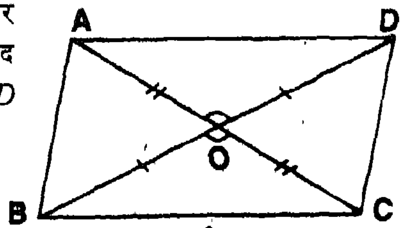
$\therefore AB \parallel DC$ ... (7)

अतः (6) और (7) से

$ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रमेय 11.2 (ग) (प्रमेय 11.1 (ग) का विलोम)

यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों, तो चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।



आकृति 11.12

दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ जिस में विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं, कि $AO = OC$, और $BO = OD$ (आकृति 11.12)

सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है।

उपपत्ति : त्रिभुज AOD और त्रिभुज COB में,

$AO = CO$

$OD = OB$ (दिया है)

$\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta COB$ (भुजा कोण भुजा स० अ०)

और $\angle AOD = \angle OCB$.

क्योंकि, ये एकांतर अंत: कोण हैं, जो तिर्यक रेखा AC का AD और BC से प्रतिच्छेद करने से बने हैं,

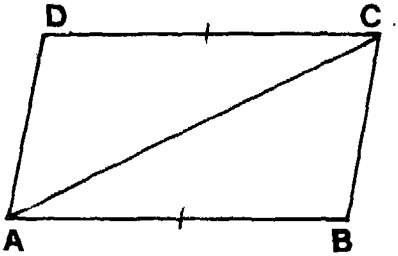
$\therefore AD \parallel BC$.

इसी प्रकार $AB \parallel CD$

अत: $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है।

प्रमेय 11.2 (घ) : *एक चतुर्भुज समांतरचतुर्भुज होता है यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर और समांतर हों।*

दिया है : चतुर्भुज $ABCD$, जिसमें $AB = CD$, और $AN \parallel CD$ (आकृति 11.13)



आकृति 11.13

सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है।

रचना : त्रिभुजों ABC और CDA में,

$AB = CD$ (दिया है)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

$\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर अंत: कोण, $AB \parallel CD$)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसम अभिगृहीत)

अत: $\angle BCA = \angle DAC$

$\therefore AD \parallel BC$

अत: $AB \parallel CD$ और $AD \parallel BC$

$\therefore ABCD$ एक समांनरचतुर्भुज है।

संक्षेप में

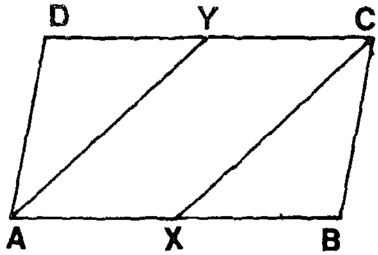
प्रमेय 11.2 : *एक चतुर्भुज समांतरचतुर्भुज होता है।*

(क) यदि सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म परस्पर बराबर हों;

या (ख) यदि सम्मुख कोणों के दोनों युग्मों में से प्रत्येक परस्पर बराबर हों;
या (ग) यदि विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों;
या (घ) यदि सम्मुख भुजाओं का एक युग्म, बराबर और समांतर दोनों ही हो।

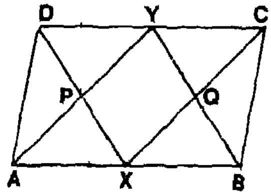
प्रश्नावली 11.2

1. आकृति 11.14 में, $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है। X और Y, भुजाओं AB और CD के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं। दिखाइए कि $AXCY$ एक समांतरचतुर्भुज है।



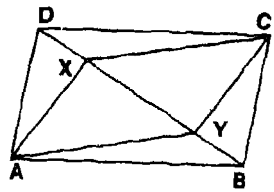
आकृति 11.14

2. आकृति 11.15 में, समांतरचतुर्भुज $ABCD$ की सम्मुख भुजाओं AB और DC के मध्य बिन्दु क्रमशः X और Y हैं। AX और DY को मिलाया गया है, जो P पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं। CX और BY को मिलाया गया है, जो Q पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं। दिखाइए कि $PXQY$ एक समांतरचतुर्भुज है।



आकृति 11.15

3. आकृति 11.16 में, $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है और X, Y विकर्ण BD पर ऐसे बिन्दु हैं कि $DX = BY$। सिद्ध कीजिए कि $AXCY$ एक समांतरचतुर्भुज है।

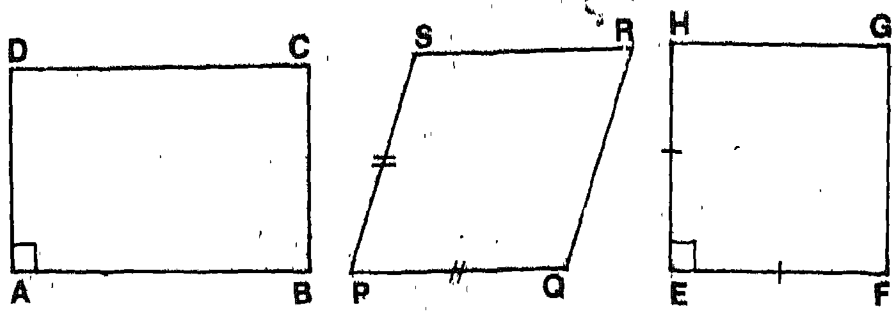


आकृति 11.16

4. AB और CD दो समांतर रेखाएं हैं। एक तिर्यक रेखा l रेखा AB को X पर और रेखा CD को Y पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि अंतः कोणों के समद्विभाजक एक समांतरचतुर्भुज बनाते हैं जिसका प्रत्येक कोण समकोण है।
5. $\Delta\ ABC$ और $\Delta\ DEF$ में AB, BC क्रमशः DE और EF के बराबर और समांतर हैं; दिखाइए कि AC और DF समांतर और बराबर हैं।

11.4 आयत, समचतुर्भुज और वर्ग

अब हम कुछ विशेष प्रकार के समांतरचतुर्भुजों अर्थात् आयत, समचतुर्भुज (rhombus) और वर्ग का अध्ययन करेंगे। (आकृति 11.17)



(i) आयत (ii) समचतुर्भुज (iii) वर्ग

आकृति 11.17

आइए इनमें से प्रत्येक को एक विशेष गुणधर्म वाले समांतरचतुर्भुज के रूप में परिभाषित करें :

परिभाषा : आयत : *आयत एक समांतर चतुर्भुज होता है जिसका एक कोण समकोण है।*

आकृति 11.17 (i) में, $ABCD$ एक आयत है, क्योंकि $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है और इसका एक कोण $\angle A$ समकोण है।

क्योंकि $AD \parallel BC$, और रेखा AB इन्हें A और B पर प्रतिच्छेदित करती है, इसलिए $\angle A + \angle B = 180°$, पर क्योंकि $\angle A = 90°$, इसलिए $\angle B = 90°$, इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं, कि $\angle C = 90°$ और $\angle D = 90°$। अत:

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$$

अत: हमें निम्न उपप्रमेय प्राप्त होता है।

आयत के चारों कोणों में से प्रत्येक कोण एक समकोण होता है।

परिभाषा : समचतुर्भुज : *समचतुर्भुज एक समांतरचतुर्भुज होता है, जिसकी क्रमागत भुजाओं का एक युग्म बराबर हो।*

आकृति 11.17 (ii) में, $PQRS$ एक समचतुर्भुज है क्योंकि $PQRS$ एक समांतरचतुर्भुज है और इसकी क्रमागत भुजाएं PQ और PS बराबर हैं।

क्योंकि $PQRS$ एक समांतर चतुर्भुज है, इसलिए $PQ = RS$ और $PS = QR$, क्योंकि ये सम्मुख भुजाओं के दो युग्म हैं। परन्तु हमें ज्ञात है कि $PQ = PS$

$$\therefore\ PQ = PS = QR = RS$$

इस प्रकार हमें निम्न उप-प्रमेय प्राप्त होता है:

समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा एक सी लम्बाई की होती है; या
समचतुर्भुज की चारों भुजाएं परस्पर बराबर होती हैं।

परिभाषा : वर्ग : *वर्ग एक आयत है जिसकी दो क्रमागत भुजाएं बराबर हों।*

आकृति 11.17 (iii) में, $EFGH$ एक वर्ग है; क्योंकि □ $EFGH$ एक आयत है और इसकी क्रमागत भुजाएं EF और EH बराबर हैं।

आयत और समचतुर्भुज से प्राप्त परिणामों के अनुसार वर्ग $EFGH$ में

$$\angle E = \angle F = \angle G = \angle H = 90^\circ$$

और $EF = FG = GH = HE$

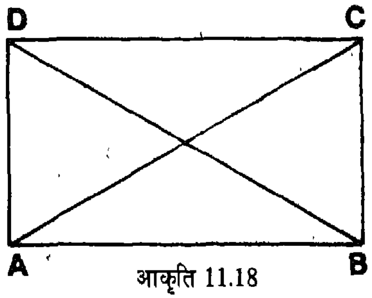
दूसरे शब्दों में, वर्ग का प्रत्येक कोण समकोण होता है और चारों भुजाओं में से प्रत्येक एक सी लम्बाई की होती है।

हम जानते हैं कि समांतरचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यह कथन आयत, समचतुर्भुज और वर्ग के लिए भी सत्य है क्योंकि इन में से प्रत्येक समांतरचतुर्भुज है। निम्नलिखित प्रमेयों में हम इन विशेष समांतरचतुर्भुजों के विकर्ण सम्बन्धी कुछ अतिरिक्त गुणधर्मों का कथन देंगे और उन्हें सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 11.3 : *आयत के विकर्ण समान लम्बाई के होते हैं।*

दिया है : आयत $ABCD$

AC और BD, आयत $ABCD$ के विकर्ण हैं; (आकृति 11.18)



आकृति 11.18

सिद्ध करना है : $AC = BD$

उपपत्ति : क्योंकि □ $ABCD$ एक आयत है,

$\therefore$ □ $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है और उस का एक कोण समकोण है। मान लीजिए $\angle A = 90^\circ$

अब $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (क्रमागत अतः कोण, $AD \parallel BC$)

$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ$

अब त्रिभुजों ABD और BAC में,

$AB = BA$ (उभयनिष्ठ)

$\angle A = \angle B$ (प्रत्येक समकोण)

$AD = BC$ ($||^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

$\therefore \ \Delta ABD \cong \Delta BAC$ (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसम अभिगृहीत)

अतः $BD = AC$

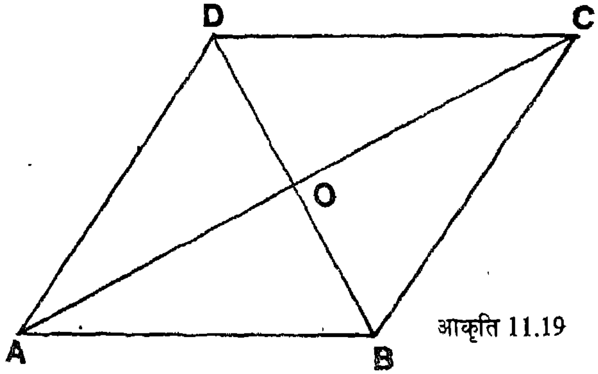
प्रमेय 11.4 : *समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।*

दिया है : समचतुर्भुज $ABCD$

समचतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(आकृति 11.19)

सिद्ध करना है : $\angle COB = 90°$



आकृति 11.19

उपपत्ति : क्योंकि $ABCD$ एक समचतुर्भुज है,

$\therefore$ $ABCD$ एक ऐसा समांतरचतुर्भुज है कि

$AB = BC = DC$ (परिभाषा से)... (1)

क्योंकि समांतरचतुर्भज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं,

$\therefore \ BO = OD$ और $AO = OC$ ...(2)

अब ΔBOC और ΔDOC में,

$BO = DO$ (ऊपर (2) से)

$BC = DC$ [ऊपर (1) से]

$OC = OC$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \ \Delta BOC \cong \Delta DOC$ (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसम प्रमेय)

$\therefore \angle BOC = \angle DOC$

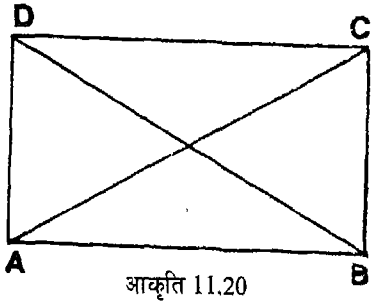
लेकिन $\angle BOC + \angle DOC = 180°$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

$\therefore \ \angle BOC = \angle DOC = 90°$

उपप्रमेय : *वर्ग के विकर्ण बराबर तथा परस्पर लम्ब होते हैं।*

उपपत्ति : विद्यार्थी के लिए अभ्यास के रूप में छोड़ दिया गया है।
[**संकेत** : प्रमेय 11.5 और 11.6 का प्रयोग कीजिए।]

प्रमेय 11.5 (प्रमेय 11.3 का विलोम)
यदि समांतरचतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह एक आयत होता है।



आकृति 11.20

दिया है : □ $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है। जिसमें $AC = BD$ (आकृति 11.20)

सिद्ध करना है : $||^{gm}$ $ABCD$ एक आयत है।

उपपत्ति : त्रिभुजों ABC और DCB में,

$AB = DC$ ($||^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

$BC = CB$ (उभयनिष्ठ)

और $AC = DB$ (दिया है)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DCB$ (भु-भु-भु सर्वांगसम प्रमेय)

$\therefore \angle ABC = \angle DBC$

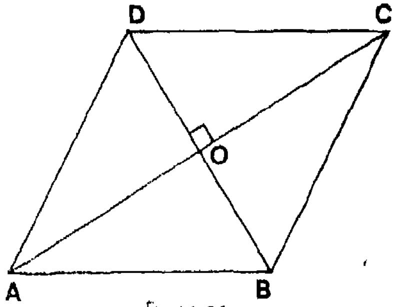
परन्तु ये तिर्यक रेखा BC और समांतर रेखाओं AB और CD द्वारा बनाए एक ही ओर के अन्तः कोण हैं।

$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180°$

अतः $\angle ABC = 90°$

$\therefore$ $||^{gm}$ $ABCD$ एक आयत है।

प्रमेय 11.6 : *यदि समांतरचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब हों, तो वह एक समचतुर्भुज* होता है।



आकृति 11.21

दिया है : □ $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है। और $AC \perp BD$ (आकृति 11.21)

सिद्ध करना है : $||^{gm}$ $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति : मान लीजिए AC और BD, बिन्दु O पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं।

ΔAOD और ΔCOD में,

$AO = OC$ ($||^{gm}$ के विकर्ण समद्विभाजित करते हैं)

$\angle AOD = \angle COD$ (प्रत्येक समकोण)

$OD = OD$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \ \Delta AOD \cong \Delta COD$ (भु-को-भु स० अभिगृहीत)

अतः $AD = CD$

इसलिए $||^{gm}$ $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

उप-प्रमेय : *यदि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर और लम्ब हों, तो वह एक वर्ग होता है।*

उपपत्ति : इसे विद्यार्थी के लिए अभ्यास के रूप में छोड़ दिया गया है।
[**संकेत :** प्रमेय 11.5 और 11.6 का प्रयोग कीजिए।]

प्रश्नावली 11.3

1. सिद्ध कीजिए कि आयत की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्डों से एक समचतुर्भुज बनता है।
2. □ $ABCD$ एक समचतुर्भुज है और P, Q, R, S क्रमशः AB, BC, CD, DA के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि □ $PQRS$ एक आयत है।
3. एक चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण परस्पर लम्ब हैं। सिद्ध कीजिए कि इसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्डों से एक आयत बनता है।
4. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिला कर बनाया गया चतुर्भुज एक वर्ग होता है।
5. निम्न लिखित आकृतियों में से, किन-किन के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं?

   (क) समलम्ब (ख) समांतरचतुर्भुज

   (ग) समचतुर्भुज (घ) आयत

   इनमें से किन-किन के विकर्ण परस्पर लम्ब होंगे?

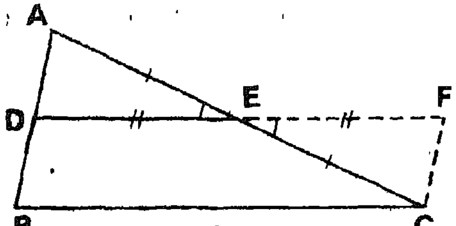
   इनमें से किन-किन के विकर्ण परस्पर बराबर होंगे?

11.5 समांतर रेखाएं और त्रिभुज

समांतर चतुर्भुजों पर भिन्न-भिन्न प्रमेयों का प्रयोग कर, अब हम त्रिभुज के सम्बन्ध में कुछ रोचक और उपयोगी परिणाम प्राप्त करेंगे।

प्रमेय 11.7 : *त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समांतर और लम्बाई में उसका आधा होता है।*

दिया है : एक त्रिभुज ABC में, D, भुजा AB का मध्य बिन्दु है और E, भुजा AC का मध्य बिन्दु है। DE को मिलाया गया है। (आकृति 11.22)



आकृति 11.22

सिद्ध करना है : (i) $DE \parallel BC$ और

(ii) $DE = \frac{1}{2}\ BC$

रचना : रेखा खण्ड DE को F तक बढ़ाइए जिससे कि $DE = EF$

FC को मिलाइए।

उपपत्ति : त्रिभुज AED और त्रिभुज CEF में

$AE = CE$ (दिया है)

$ED = EF$ (रचना)

$\angle AED = \angle CEF$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore\ \Delta AED \cong \Delta CEF$ (कोण-भुजा-कोण सर्वांगसम अभिगृहीत)

अतः $AD = CF$ ... (1)

$\angle ADE = \angle CFE$ ... (2)

अब (1) से,

$AD = CF$

और $AD = DB$ (दिया है)

$\therefore\ DB = FC$ ... (3)

फिर, क्योंकि DF, AD और FC को D और F पर प्रतिच्छेदित करती है, और एकांतर अन्तः कोण

$\angle ADE = \angle CFE$ ... (ऊपर (2) से)

$\therefore AD \parallel FC$ ... (4)

परिणाम (3) और (4) से

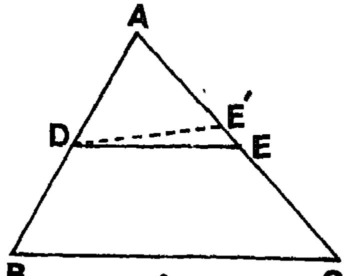
□ $BCFD$ एक समांतरचतुर्भुज है। ... (5)

अतः $DF \parallel BC$ और $DF = BC$ ($\parallel^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

परन्तु D, E, F संरेख है और $DE = EF$ (रचना)

$\therefore DE \parallel BC$ और $DE = \frac{1}{2}\ BC$

प्रमेय 11.8 (प्रमेय 11.7 का विलोम) :
त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से, एक अन्य भुजा के समातर खींची गई रेखा, तीसरी भुजा को उसके मध्य बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती है।



आकृति 11.23

दिया है : त्रिभुज ABC में, D भुजा AB का मध्य बिन्दु है। D से BC के समांतर खींची गई रेखा त्रिभुज की भुजा AC को बिन्दु E पर प्रतिच्छेदित करती है (आकृति 11.23)।

सिद्ध करना है : E, AC का मध्य बिन्दु है।

उपपत्ति : हम अप्रत्यक्ष विधि से इस प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

मान लीजिए E भुजा AC का मध्य बिन्दु नहीं है, और मान लीजिए कि E', भुजा AC का मध्य बिन्दु है।

अब त्रिभुज ABC में, D, AB का मध्य बिन्दु है, और E', AC का मध्य बिन्दु है,

$\therefore DE' \parallel BC$ ... (1)

परंतु $DE \parallel BC$ दिया है ... (2)

(1) और (2) से स्पष्ट है, कि दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ DE और DE' दोनों रेखा BC के समांतर हैं।

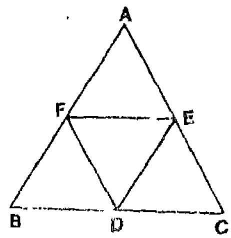
पर यह तो अंतर्विरोध है। (समांतर अभिगृहीत)

इस प्रकार हमारी कल्पना गलत है।

अतः $AE = EC$

अर्थात E, AC का मध्य बिन्दु है।

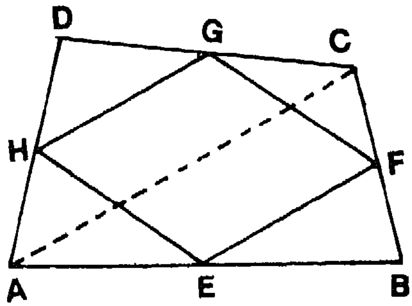
प्रश्नावली 11.4



आकृति 11.24

1. आकृति 11.24 में, समबाहु त्रिभुज ABC में D, E और F क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔDEF भी एक समबाहु त्रिभुज है।

2. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के युग्मों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्डों से बना चतुर्भुज (आकृति 11.25) एक समांतरचतुर्भुज होता है।



आकृति 11.25

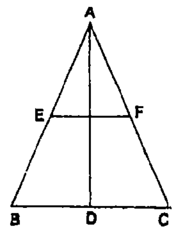
3. ΔABC का $\angle B$ समकोण है और P भुजा AC का मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि

$$PB = PA = \frac{1}{2} AC$$

[**संकेत** : P से होती हुई BC के समांतर एक रेखा खींचिए, जो AB को Q पर मिलती हो।]

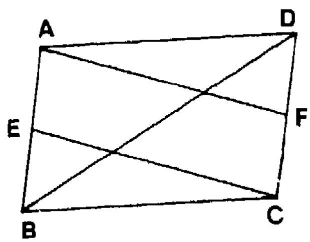
4. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्डों से जो चार त्रिभुज बनते हैं, वे परस्पर सर्वांगसम होते हैं।

5. आकृति 11.26 में, ΔABC में, $AB = AC$। बिन्दु D, E, F क्रमशः भुजाओं BC, AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि रेखा खण्ड BD, रेखा खण्ड EF पर लम्ब है और इसको समद्विभाजित करता है।



आकृति 11.26

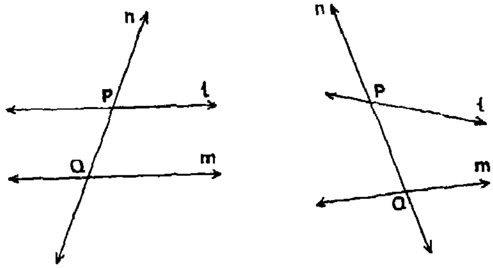
6. आकृति 11.27 में, $ABCD$ एक समांतर-चतुर्भुज है। E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि रेखा खण्ड AF और CE, विकर्ण BD को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।



आकृति 11.27

11.6 अंतःखण्ड

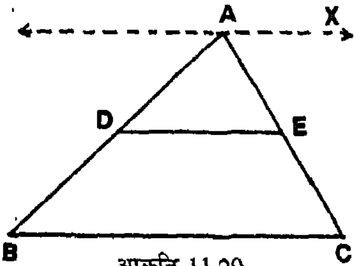
परिभाषा :*यदि एक समतल में दो रेखाएं l और m, (समांतर अथवा प्रतिच्छेदी) दी हुई हों, और यदि एक तीसरी रेखा n उन्हें भिन्न बिन्दुओं P और Q पर प्रतिच्छेदित करती हों, तो रेखाखण्ड PQ को, दी हुई रेखाओं द्वारा इस (तीसरी रेखा) पर बनाया गया अंतःखण्ड कहते हैं (आकृति 11.28)।*



आकृति 11.28

आपको निम्नलिखित परिणाम तो याद होगा, जिसे पहले सिद्ध किया जा चुका है।

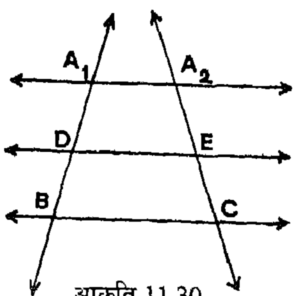
त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से एक अन्य भुजा के समांतर खींची गई रेखा, तीसरी भुजा का उसके मध्य बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।



आकृति 11.29

आकृति 11.29 में, मान लीजिए D, भुजा AB का मध्य बिन्दु है और $DE \parallel BC$ है। तो प्रमेय के अनुसार $AE = EC$। मान लीजिए, A से होती हुई BC के समांतर रेखा AX खींची गई है। AX, DE और BC तीन समांतर रेखाएं हैं। ये रेखाएं, AB पर अंतः खण्ड AD और DB बनाती हैं और AC पर अंतः खण्ड AE और EC बनाती हैं। अतः प्रमेय के अनुसार यदि $AD = DB$ तो $AE = EC$। हम एक और अधिक व्यापक आकृति पर विचार कर सकते हैं। (आकृति 11.30)।

क्या अब भी हम यह कह सकते हैं कि यदि $A_1D = DB$ तो $A_2E = EC$। सम्भवतः, हां। हम अगले प्रमेय में, इस तथ्य का कथन देंगे और उसे सिद्ध करेंगे।

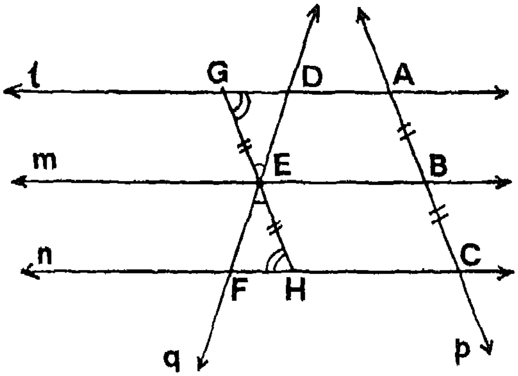


आकृति 11.30

प्रमेय 11.9 : *यदि तीन समांतर रेखाएं हों और उनके द्वारा, एक तिर्यक रेखा पर बनाए गये अंतःखण्ड बराबर हों, तो किसी अन्य तिर्यक रेखा पर उनके द्वारा बनाये गए अंतःखण्ड भी बराबर होंगे।*

दिया है : l, m, n तीन समांतर रेखाएं है। p एक तिर्यक रेखा है, जो l, m, n को क्रमशः बिन्दुओं A, B, C पर प्रतिच्छेदित करती है और $AB = BC$

q एक अन्य तिर्यक रेखा है जो l, m, n को क्रमशः बिन्दुओं D, E, F पर प्रतिच्छेदित करती है (आकृति 11.31)।



आकृति 11.31

सिद्ध करना है : $DE = EF$

रचना : बिन्दु E से, रेखा P के समांतर एक रेखा खींचिए जो l और n को क्रमशः G और H पर प्रतिच्छेदित करे (आकृति 11.31)।

उपपत्ति : क्योंकि $AG \parallel EB$ (दिया है)

और $GE \parallel AB$ (रचना)

$\therefore$ $\square AGEB$ समांतरचतुर्भुज है। ... (1)

इसी प्रकार $\square BEHC$ समांतर चतुर्भुज है। ... (2)

(1) और (2) से

$GE = AB$ ($\|^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

$EH = BC$ ($\|^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

परन्तु $AB = BC$ (दिया है)

$\therefore$ $GE = EH$ ... (3)

अब त्रिभुज GED और त्रिभुज HEF में,

$GE = HE$ (ऊपर (3) से)

$\angle GED = \angle HEF$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle DGE = \angle FHE$ (एकांतर अंतःकोण, $GD \parallel FH$)

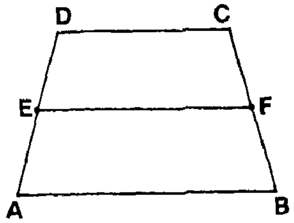
$\therefore$ $\Delta GED \cong \Delta HEF$ (कोण भुजा कोण सर्वांगसम प्रमेय)

अतः $DE = EF$

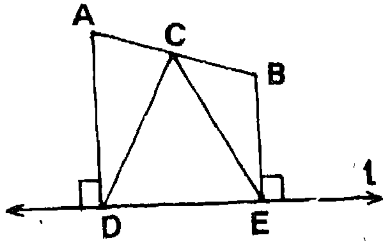
प्रश्नावली 11.5

1. आकृति 11.32 में, समलम्ब $ABCD$ में $AB \parallel DC$ और बिन्दु E, भुजा AD का मध्य बिन्दु है। E से होती हुई AB के समांतर खींची गई रेखा, BC को F पर मिलती है (आकृति 11.32)। सिद्ध कीजिए कि F भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

2. A, B दो बिन्दु, रेखा l के एक ही ओर स्थित हैं। $AD \perp l$ और $BE \perp l$, l को क्रमशः D और E में मिलते हैं। C, AB का मध्य बिन्दु है (आकृति 11.33)। सिद्ध कीजिए कि $CD = CE$



आकृति 11.32

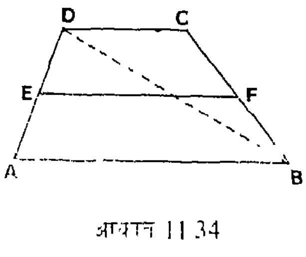


आकृति 11.33

3. समलम्ब $ABCD$ में, असमांतर भुजाओं AD और BC के मध्य बिन्दु क्रमशः E और F हैं (आकृति 11.34)। सिद्ध कीजिए कि

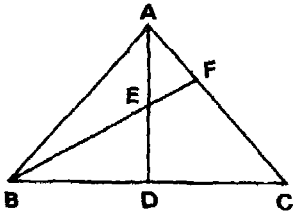
(क) $EF \parallel AB$ और (ख) $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

[**संकेत** : (क) के लिए अप्रत्यक्ष विधि का प्रयोग कीजिए और (ख) के लिए $\triangle ABD$ और $\triangle CDB$ को लीजिए।]



आकृति 11.34

4. Δ ABC में, शीर्ष A से खींची गई रेखा AD माध्यिका है, और E, AD का मध्य बिन्दु है। BE को बढ़ाने पर, यह AC को F पर मिलती है (आकृति 11.35)। सिद्ध कीजिए कि $AF = \frac{1}{3} AC$



आकृति 11.35

5. त्रिभुज ABC में, भुजा AB को बिन्दु M और N, तीन बराबर भागों में बांटते हैं। दोनों रेखाखण्ड MP और NQ भुजा BC के समांतर हैं और AC को क्रमशः P और Q पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि P, Q, भुजा AC को तीन बराबर भागों में बांटते हैं।
6. दिखलाइए कि चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के मिलाने वाले रेखाखण्ड, परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
[**संकेत** : यह दिखाइए कि ये समांतरचतुर्भुज के विकर्ण हैं।]

अध्याय 12

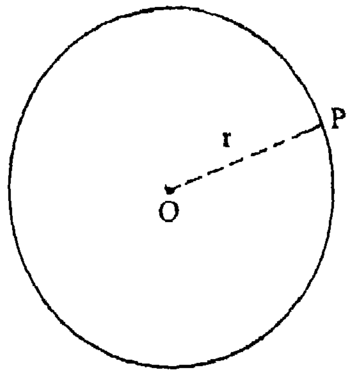
बिन्दुपथ और संगामी प्रमेय

12.1 बिन्दुपथ

बिन्दुपथ (locus) बिन्दुओं का एक समुच्चय होता है।

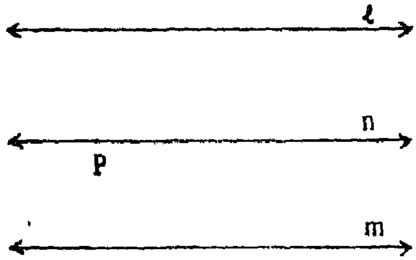
आइए हम बिन्दुपथ से संबंधित कुछ उदाहरण लें :

(1) मान लीजिए कि समतल में, O एक बिन्दु है और r एक धन वास्तविक संख्या है। समतल के वे सभी बिन्दु जो O से दूरी r पर हैं, एक बिन्दुपथ बनाते हैं। यहाँ बिन्दुपथ एक वृत्त है, जिसका केन्द्र O और त्रिज्या r है। (आकृति 12.1)

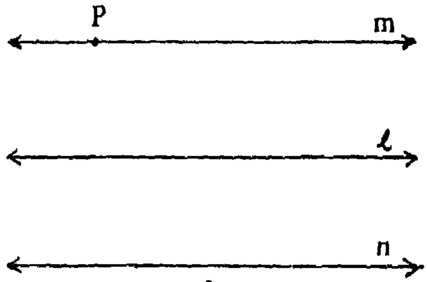


आकृति 12.1

(2) दो समांतर रेखाएं l और m लीजिए। ऐसे सभी बिन्दुओं की कल्पना कीजिए जो l और m से समदूरस्थ (equidistant) हों। यह एक रेखा n है जो l और m दोनों के समांतर है और उन के मध्य में स्थित है (आकृति 12.2)।



आकृति 12.2



आकृति 12.3

(3) मान लीजिए l एक रेखा है और d एक धन वास्तविक संख्या है। ऐसे सभी बिन्दुओं की कल्पना कीजिए जो l से दूरी d पर स्थित हों। यहां हमें दो रेखाएँ m और n प्राप्त होती हैं जिन में से प्रत्येक l के समांतर है, और l से दूरी d पर स्थित है। इन दोनों रेखाओं को एक साथ लेने पर अभीष्ट बिन्दुपथ प्राप्त होता है। (आकृति 12.3)

उदाहरणों को देखने से यह पता चलता है कि प्रत्येक उदाहरण में बिन्दु एक दिए हुए प्रतिबन्ध को संतुष्ट करते हैं और प्रत्येक में हमें एक बिन्दु पथ प्राप्त होता है। अब हम इस संकल्पना को औपचारिक रूप से परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा : *बिन्दुपथ ऐसे सभी बिन्दुओं का समुच्चय होता है जो कुछ दिए हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करते हैं।*

इस परिभाषा को देखने से पता चलता है कि इसमें निम्नलिखित दो पूरक विचारों का समावेश है :

(i) दिए हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करने वाला प्रत्येक बिन्दु बिन्दुपथ का एक बिन्दु है, और

(ii) बिन्दुपथ का प्रत्येक बिन्दु दिये हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है।

इस प्रकार हम किसी बिन्दुपथ और उसको निर्धारित करने वाले प्रतिबन्धों को अभिन्न समझ कते हैं। एक से दूसरे का आभास होता है।

क्योंकि विन्दुपथ एक समुच्चय होता है, इसलिए संभवतः दो बिन्दुपथों के सम्मिलन या उनके सर्वनिष्ठ से हम एक नया बिन्दुपथ प्राप्त कर सकते हैं। यदि S_1 और S_2 दो बिन्दुपथ हों, तो $S_1 \cup S_2$ और $S_1 \cap S_2$ भी संभाव्य (नए) बिन्दुपथ होंगे।

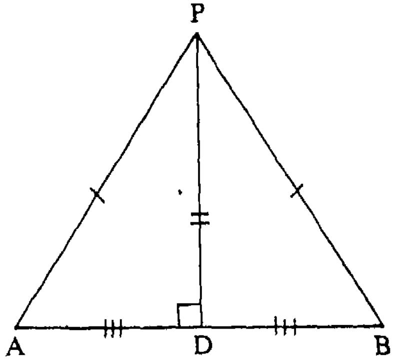
अब हम दो महत्वपूर्ण बिन्दु पथों पर विचार करेंगे। इनका महत्व इसलिए है क्योंकि इनका प्रयोग दूसरे प्रमेयों को सिद्ध करने या ज्यामितीय रचनाओं में किया जाता है।

12.2 दिये हुए दो बिन्दुओं से सम-दूरस्थ बिन्दु

मान लीजिए A और B दो बिन्दु दिये हैं। आइए अब हम उस बिन्दु P के बिन्दुपथ पर विचार करें जो प्रतिबन्ध $AP = BP$ को सन्तुष्ट करता हो।

यदि D, रेखा खण्ड AB का मध्य बिन्दु है तब $AD = DB$ और इस लिए D, अभीष्ट बिन्दु पथ का एक सदस्य है। मान लीजिए D से भिन्न P एक अन्य ऐसा बिन्दु है, जिससे कि $AP = BP$ है।

हम देखते हैं कि यदि PD को मिला दें तो AP और BP दो त्रिभुजों ADP और BDP की भुजाएं हैं। (आकृति 12.4) हम इन त्रिभुजों के बारे क्या कह सकते हैं? हम देखते हैं कि भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसम प्रमेय के आधार पर $\Delta ADP \cong \Delta BDP$. और इस प्रकार $\angle ADP = \angle BDP$। अब यह दिखाना सरल है कि $\angle ADP = 90°$ या $PD \perp AB$ है। अतः PD, रेखा खण्ड AB का लम्ब-समद्विभाजक है। इस रेखा



आकृति 12.4

को l मान लीजिए। क्योंकि P कोई भी बिन्दु है, जो A और B से सम-दूरस्थ है, अतः अभीष्ट बिन्दुपथ l में आविष्ट है।

प्रश्न होता है कि क्या l में ऐसे बिन्दु भी हैं जो A और B से सम-दूरस्थ नहीं हैं। हम इसे कैसे सुनिश्चित करेंगे? रेखा l पर कोई बिन्दु Q लीजिए, और जांच कीजिए कि $AQ = BQ$। यदि यह संतुष्ट होता हो तो हम लिख सकते हैं :

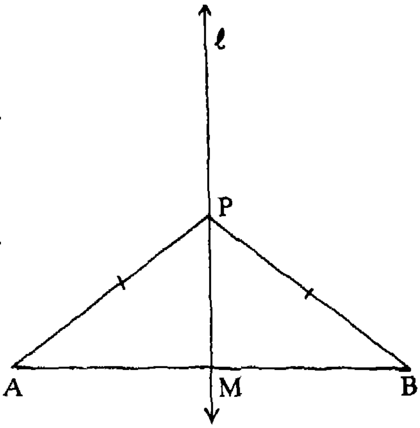
$$l = \{P : AP = BP\}$$

जहां l, AB का लम्ब-समद्विभाजक है।

उपरोक्त चर्चा के आधार पर हम निम्नलिखित प्रमेय को कथन देकर सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 12.1 : *उस बिन्दु का बिन्दु पथ जो दो दिये हुए बिन्दुओं से सम-दूरस्थ हो, इन दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड का लम्ब-समद्विभाजक होता है।*

(भाग I)



आकृति 12.5

दिया है : A और B दो बिन्दु दिए हुए हैं। इसी समतल में P एक ऐसा बिन्दु है कि $PA = PB$ है।

सिद्ध करना है : बिन्दु P, AB के लम्ब-समद्विभाजक l पर स्थित है।

रचना : AB को मिलाइए।
AB का मध्य बिन्दु M ज्ञात कीजिए।
PA और PB को मिलाइए। (आकृति 12.5)

उपपत्ति : यदि P, M से अभिन्न हो, तो

$AM = MB$ (रचना)

या $AP = BP$

$\therefore$ P, AB के समद्विभाजक पर स्थित है। ...(1)

यदि, P, M से भिन्न हो, तो

$\Delta\ AMP$ और $\Delta\ BMP$ में,

$AM = BM$ (रचना)

$MP = MP$ (उभयनिष्ठ)

$AP = BP$ (दिया है)

$\therefore\ \Delta\ AMP \cong \Delta\ BMP$ (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसम प्रमेय)

विशेष रूप से,

$\angle AMP = \angle BMP$

परन्तु $\angle AMP + \angle BMP = 180°$

$\therefore \angle AMP = \angle BMP = 90°$

या $PM \perp AB$

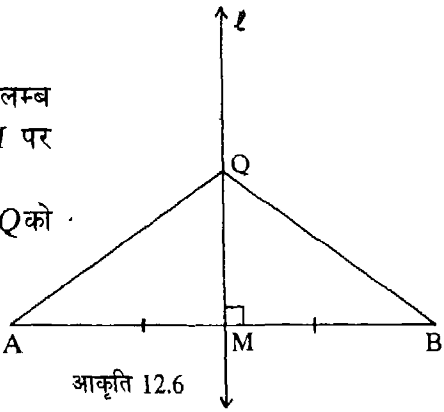
क्योंकि M, AB का मध्य बिन्दु है,

$\therefore$ PM, AB का लम्ब समद्विभाजक (l) होगा या PM और रेखा l समान होंगे

$\therefore$ P, l पर स्थित है।

(भाग II)

दिया है : दो बिन्दु A और B हैं। रेखा l, AB का लम्ब समद्विभाजक है, जो इसे बिन्दु M पर समद्विभाजित करती है।
Q रेखा l पर कोई बिन्दु है। AP और BQ को मिलाया गया है (आकृति 12.6)।



आकृति 12.6

सिद्ध करना है : $AQ = BQ$

उपपत्ति : यदि Q, M के साथ संपाती हो, तो

$AM = BM$ (दिया है)

या $AQ = BQ$

यदि Q, M से भिन्न हो, तो

$AM = BM$ (दिया है)

$MQ = MQ$ (उभयनिष्ठ)

$\angle AMQ = \angle BMQ$ (प्रत्येक समकोण)

$\therefore \Delta AMQ \cong \Delta BMQ$ (भुजा-कोण-भुजा स० अ०)

ΔAMQ और ΔBQM में,

विशेष रूप से,

$AQ = BQ$

उदाहरण 12.1 : ΔPBC, ΔQBC और ΔRBC, एक ही आधार BC पर तीन समद्विबाहु त्रिभुज हैं। दिखाइए कि P, Q और R संरेख हैं।

दिया है : ΔPBC, ΔQBC और ΔRBC ऐसे हैं कि

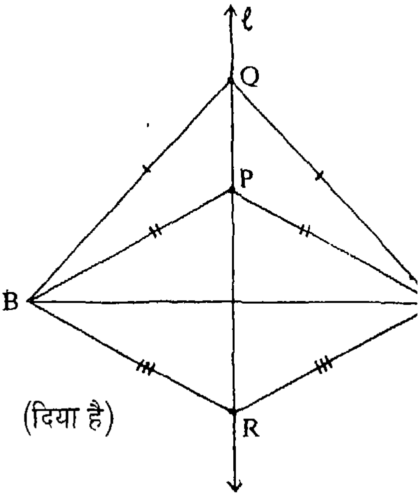
$PB = PC$, $QB = QC$, $RB = RC$

(आकृति 12.7)

सिद्ध करना है : P, Q, R सरेख हैं।

हल :

(**विश्लेषण :** यह दिखाने के लिए कि P, Q और R संरेख हैं, हमें एक ऐसी रेखा मालूम करनी है, जिस पर ये तीनों बिन्दु स्थित हों या जिससे यह पता चले कि R रेखा PQ पर स्थित है। हम जानते हैं, कि ΔPBC, समद्विबाहु त्रिभुज है और $PB = PC$ है। क्या आप ऐसी रेखा सोच सकते हैं जिस पर P स्थित है। हां, ऐसी रेखा, रेखा खण्ड BC का लम्ब-समद्विभाजक है।)



आकृति 12.7

उपपत्ति : क्योंकि ΔPBC समद्विबाहु त्रिभुज है (दिया है)

$\therefore PB = PC$

हम जानते हैं कि उस बिन्दु का बिन्दु पथ, जो B और C से बराबर दूरी पर है, BC का लम्ब-समद्विभाजक होता है। मान लीजिए यह रेखा l है।

$\therefore P, l$ पर स्थित है। ... (1)

इसी प्रकार Q, l पर स्थित है ... (2)

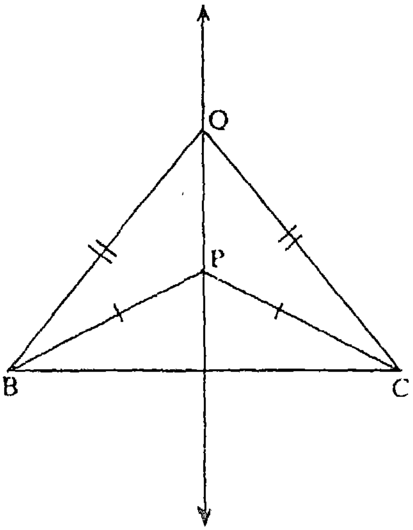
और R, l पर स्थित है ... (3)

(1), (2) और (3) से

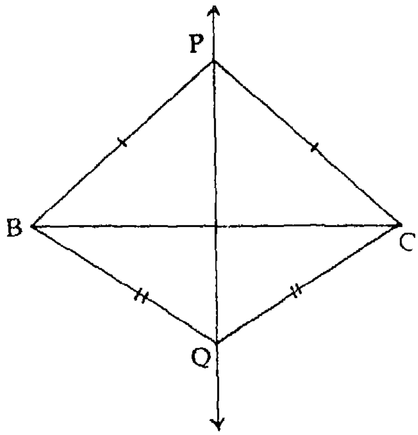
P, Q, R संरेख हैं।

प्रश्नावली 12.1

1. ΔPBC और ΔQBC एक ही आधार BC पर एक ही ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (आकृति 12.8)। दिखाइए कि रेखा PQ, रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करती है और उस पर लम्ब है।
2. ΔPBC और ΔQBC एक ही आधार पर विपरीत दिशा में दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं। (आकृति 12.9)। दिखाइए कि रेखा PQ, रेखा खण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।
3. सिद्ध कीजिए कि उन वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दु पथ, जो बिन्दुओं A और B से होकर जाते हैं, रेखा खण्ड AB का लम्ब-समद्विभाजक है।
4. सिद्ध कीजिए कि यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों और परस्पर लम्ब हों, तो वह चतुर्भुज समचतुर्भुज होगा।



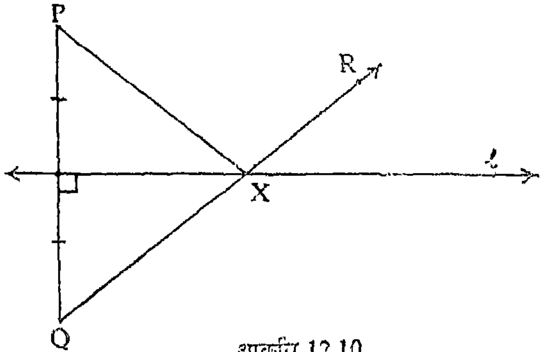
आकृति 12.8



आकृति 12.9

[**संकेत :** यदि $ABCD$ चतुर्भुज है, और इस के विकर्ण AC और BD परस्पर लम्ब हों और परस्पर समद्विभाजित करते हों, तो क्योंकि A, BD के लम्ब-समद्विभाजक पर है, अतः $AB = AD$। इसी प्रकार, $BA = BC$, इत्यादि।]

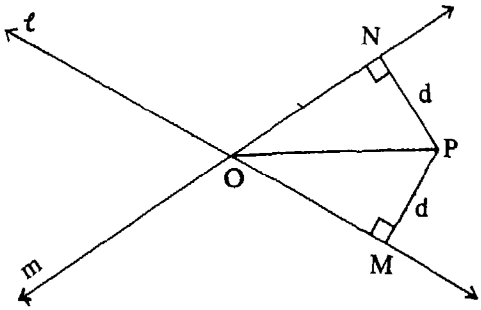
5. उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ क्या होगा जो तीन असंरेख बिन्दुओं A, B और C से समान दूरी पर हों? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
6. यदि तीन भिन्न बिन्दु एक रेखा पर स्थित हों, तो उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ क्या होगा जो इन बिन्दुओं से समान दूरी पर हों?
7. l रेखाखण्ड PQ का लम्ब समद्विभाजक है और बिन्दु R, रेखा l के उस ओर है जिस ओर बिन्दु P है रेखा खण्ड RQ, रेखा l को बिन्दु X पर काटता है (आकृति 12.10)। सिद्ध कीजिए कि $PX + XR = QR$



आकृति 12.10

12.3 दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु

मान लीजिए रेखाएं l और m, बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 12.11)। हमें उन बिन्दुओं का बिन्दु पथ मालूम करना है जो l और m से समान दूरी पर हों। परिभाषा के अनुसार यदि बिन्दु P रेखा l पर न हो, तो P से l पर डाले गए लम्ब रेखा खण्ड की लम्बाई ही, l से P की दूरी होती है। और यदि P, l पर हो तो l से P की दूरी शून्य होती है।



आकृति 12.11

मान लीजिए, l से P की दूरी $=$ m से P की दूरी $= d$ है। यदि $d = 0$, तो P, l पर है और m पर भी। इसलिए P, बिन्दु O से अभिन्न है। यदि $d \neq 0$, तो P न तो l पर है और न ही m पर। इसलिए P, l और m द्वारा बनाये गए चारों कोणों में से किसी एक के अंतर्गत स्थित है। यदि $PM \perp l$ और $PN \perp$ m, तो $PM = PN = d$। आपके विचार में त्रिभुज OPM और OPN कैसे त्रिभुज हैं? यह सिद्ध करना सरल होगा कि $\Delta\ OPM \cong \Delta\ OPN$, जिससे कि $\angle PON = \angle POM$। इससे ज्ञात होता है कि यदि P, $\angle MON$ के अन्तर्गत स्थित है तब OP, $\angle MON$ को समद्विभाजित करता है या P, $\angle MON$ के समद्विभाजक पर स्थित है।

इसी प्रकार P अन्य तीनों कोणों के समद्विभाजकों पर स्थित होगा और इन चार कोणों के समद्विभाजकों से दो रेखाएं बनती हैं। मान लीजिए ये p और q हैं, इस प्रकार P, $p \cup q$ का एक बिन्दु होगा।

तब हम कहेंगे कि समुच्चय $p \cup$ q ही बिन्दु P का बिन्दु पथ है, जबकि $p \cup q$ में कोई ऐसा बिन्दु न हो, जो l और m से समान दूरी पर न हो। इसके लिए, हम $p \cup q$ पर कोई बिन्दु Q ले सकते हैं और यह दिखा सकते हैं कि यह l और m से समदूरस्थ है।

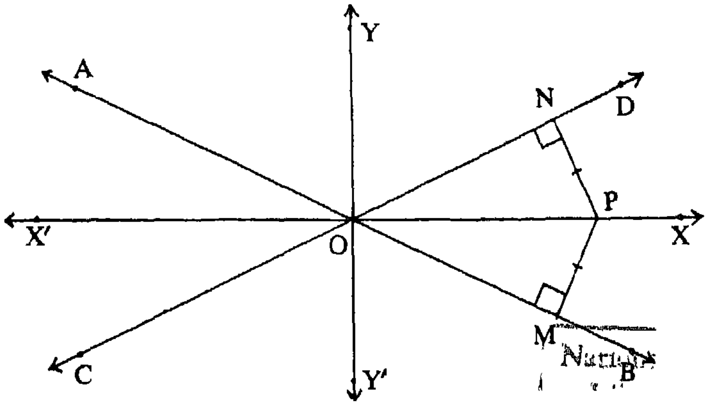
उपरोक्त चर्चा को ध्यान में रखते हुए, हम अगले प्रमेय को कथन देकर सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 12.2 : *उस बिन्दु का बिन्दु पथ जो दी हई दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से सम दूरस्थ हो, इन रेखाओं से बने कोणों को समद्विभाजित करने वाला रेखा-युग्म होता है।*

(भाग I)

दिया है : दो रेखाएँ AB और CD जो बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं और इस प्रकार ये चार कोण,

$\angle COA$, $\angle BOD$, $\angle AOD$ तथा $\angle COB$ बनाती हैं।
$X'OX$ और $Y'OY$ दो रेखाएं हैं जो इन कोणों को समद्विभाजित करती हैं।
इस समतल में P एक ऐसा बिन्दु है कि $PM \perp AB$ और $PN \perp CD$, तब $PM = PN$ (आकृति 12.12)।



आकृति 12.12

सिद्ध करना है : P, $(X'OX) \cup (Y'OY)$ का एक बिन्दु है।

रचना : OP को मिलाइए।

उपपत्ति : मान लीजिए बिन्दु P, $\angle BOD$ के अंतर्गत इस प्रकार है कि $PM \perp AB, PN \perp CD$ और $PM = PN$

समकोण त्रिभुजों OPM और OPN में,

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$PM = PN$ (दिया है)

$\Delta\ OPM \cong \Delta\ OPN$ (समकोण-कर्ण-भुजा सर्वांगसम प्रमेय)

$\therefore\ \angle POM = \angle PON$

या P, $\angle MON$ के समद्विभाजक OX पर है।

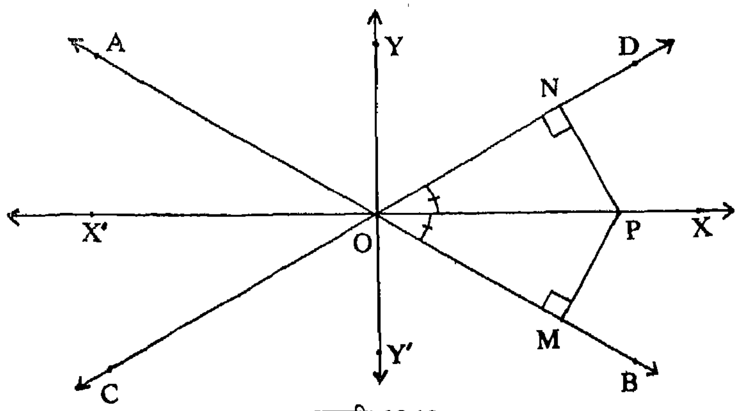
अतः P, $X'OX \cup Y'OY$ पर है।

इसी प्रकार यदि P अन्य तीन कोणों के अन्तर्गत स्थित है तो P, $(X'OX) \cup (Y'OY)$ पर होगा और O, रेखाओं AB और CD का एकमात्र प्रतिच्छेदी बिन्दु है, जो इन दोनों रेखाओं से समदूरस्थ है, और निश्चय ही O समुच्चय $X'OX \cup Y'OY$ पर है। अतः सब दशाओं में P, $X'OX \cup Y'OY$ पर है।

(भाग II)

दिया है : दो रेखाएं AB और CD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं और इनसे चार कोण $\angle COA$, $\angle AOD$, $\angle DOB$ और $\angle BOC$ बनते हैं।

$X'OX$ और $Y'OY$ दो रेखाएं हैं जो इन चारों कोणों को समद्विभाजित करती हैं। P, $X'OX \cup Y'OY$ का एक बिन्दु है तथा $PM \perp AB$ और $PN \perp CD$ है। (आकृति 12.13)



आकृति 12.13

सिद्ध करना है : $PM = PN$

उपपत्ति : यदि P और O भिन्न हों, तो त्रिभुजों OPM और OPN में,

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

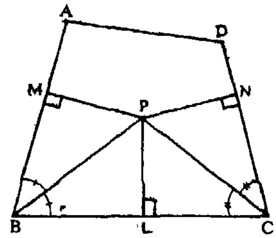
$\angle POM = \angle PON$ (दिया है)

$\angle OMP = \angle ONP$ (प्रत्येक समकोण)

$\therefore \Delta\ OPM \cong \Delta\ OPN$ (कोण-कोण-भुजा सर्वांगसम प्रमेय)

$\therefore PM = PN$

उदाहरण 12.2 : चतुर्भुज $ABCD$ के कोण $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक, बिन्दु P पर मिलते हैं। दिखाइए कि P, सम्मुख भुजाओं AB और CD से समदूरस्थ हैं।



आकृति 12.14

हल :

दिया है : एक चतुर्भुज $ABCD$। $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक बिन्दु P पर मिलते हैं।

$PM \perp AB$ और $PN \perp CD$ (आकृति 12.14)

सिद्ध करना है : $PM = PN$

[**विश्लेषण :** हमें दिखाना है कि $PM = PN$। क्योंकि P, $\angle B$ के समद्विभाजक पर है, इसलिए P, AB और BC से समदूरस्थ है। इससे यह पता चलता है कि हम $PL \perp BC$ खींचे। अब $PM = PN$, यदि $PM = PL$ और $PN = PL$। इसे हम दिखा सकते हैं।]

रचना : $PL \perp BC$ खींचिए।

उपपत्ति : $\because$ P, $\angle B$ के समद्विभाजक पर है,

$\therefore$ $PM = PL$ ... (1

$\because$ P, $\angle C$ के समद्विभाजक पर है,

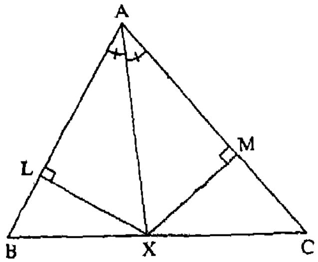
$\therefore$ $PL = PN$ ... (2

(1) और (2) से

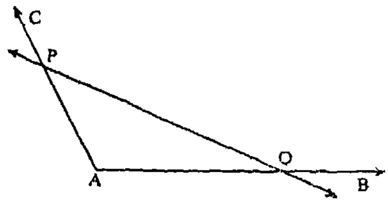
$PM = PN$

प्रश्नावली 12.2

1. ΔABC में, $\angle A$ का समद्विभाजक AX, भुजा BC को X पर प्रतिच्छेदित करता है। $XL \perp AB$ और $XM \perp AC$ खींचे गए हैं (आकृति 12.15)। क्या $XL = XM$? क्यों अथवा क्यों नहीं?



आकृति 12.15

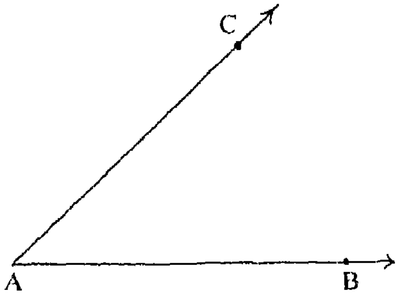


आकृति 12.16

2. $\angle BAC$ दिया है और एक रेखा, कोण $\angle BAC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः बिन्दुओं Q और P पर प्रतिच्छेदित करती हैं (आकृति 12.16)। रेखाखण्ड PQ पर एक ऐसा बिन्दु जो AB और AC से समदूरस्थ हो, कैसे ज्ञात करोगे?

   क्या ऐसा कोई बिन्दु सदैव प्राप्त कर सकते हो?

3. मानलीजिए $\angle BAC$ दिया हुआ हो (आकृति 12.17), तो उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो ∠BAC के अंतर्गत हो और रेखाओं *AB* और *AC* से समदूरस्थ हो।



आकृति 12.17

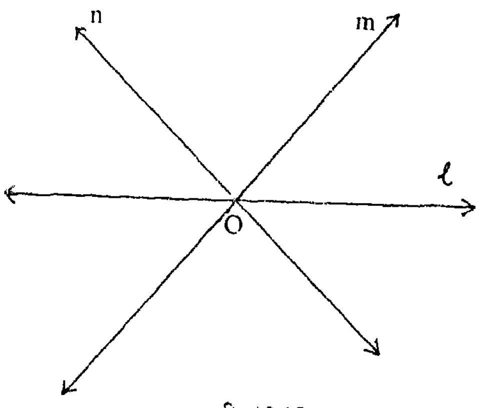
∠.4 संगामी प्रमेय

एक त्रिभुज से सम्बद्ध हम निम्नलिखित, दो रेखाखण्ड और ले रहे हैं।

रिभाषा 1 : *त्रिभुज के किसी शीर्ष और सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाले रेखा खण्ड को त्रिभुज की एक माध्यिका (median) कहते हैं।*

रिभाषा 2 : *उस रेखा खण्ड को, जो त्रिभुज के किसी शीर्ष से, सम्मुख भुजा को अंतर्विष्ट करने वाली खा पर लम्ब हो, त्रिभुज का एक शीर्ष-लम्ब* (altitude) *कहते हैं।*

तीन या तीन से अधिक रेखाओं को *संगामी* (concurrent) कहते हैं यदि वे सभी किसी एक बिन्दु से होकर जाती है। और उस दशा में, उन के सर्वनिष्ठ बिन्दु को रेखाओं का *संगामी बिन्दु* कहते हैं। (आकृति 12.18)



आकृति 12.18

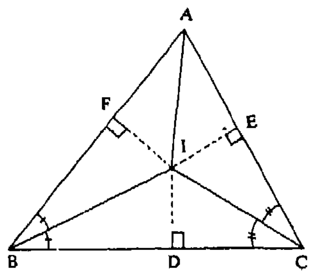
त्रिभुज एक ऐसी आकृति है जिसमें तीन भुजाएं और तीन कोण होते हैं। त्रिभुज के प्रत्येक कोण का एक समद्विभाजक होता है। इस प्रकार त्रिभुज के तीन कोण समद्विभाजक होते हैं। यह एक रोचक तथ्य है कि त्रिभुज के तीनों कोण–समद्विभाजक संगामी होते हैं, अर्थात् एक सर्वनिष्ठ बिन्दु से होकर जाते हैं। हम इस तथ्य को प्रमेय के रूप में कथन देकर सिद्ध करेंगे।

इसी प्रकार हम दिखाएंगे कि (i) त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब-समद्विभाजक, (ii) त्रिभुज की माध्यिकाएं और (iii) त्रिभुज के शीर्षलम्ब भी संगामी होते हैं।

प्रत्येक दशा में, संगामी बिन्दु का ज्यामिति में एक अपना महत्वपूर्ण स्थान है। यही कारण है कि, प्रत्येक संगामी बिन्दु को विशेष नाम दिया गया है।

आगे, हम इन चार प्रमेयों को कथन देकर सिद्ध करेंगे और उन से सम्बद्ध अन्य संकल्पनाओं पर विचार करेंगे।

प्रमेय 12.3 : त्रिभुज के कोण समद्विभाजक एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।



आकृति 12.19

दिया है : ΔABC में
$\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक बिन्दु I पर प्रतिच्छेद करते हैं।
AI को मिलाया गया है।
(आकृति 12.19)

सिद्ध करना है : AI, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

रचना : $ID \perp BC$, $IE \perp AC$ और $IF \perp BA$ खींचिए।

उपपत्ति : $\because$ I, $\angle B$ के समद्विभाजक पर स्थित है,

$\therefore$ $ID = IF$ ... (1)

$\because$ I, $\angle C$ के समद्विभाजक पर स्थित है।

$\therefore$ $ID = IE$ ... (2)

(1) और (2) से

$IE = IF$

या I, AB और AC से सम दूरस्थ है

$\therefore$ AI, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

परिभाषा : *त्रिभुज के कोण–समद्विभाजकों के संगामी बिन्दु को त्रिभुज का अन्त: केन्द्र* (incentre) कहते हैं।

टिप्पणी : त्रिभुज का अन्तः केन्द्र ज्ञात करने के लिए, उसके दो कोणों के समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करना पर्याप्त होगा, क्योंकि उपरोक्त प्रमेय के आधार पर, तीसरा कोण समद्विभाजक भी इस बिन्दु में से ही होकर जाएगा।

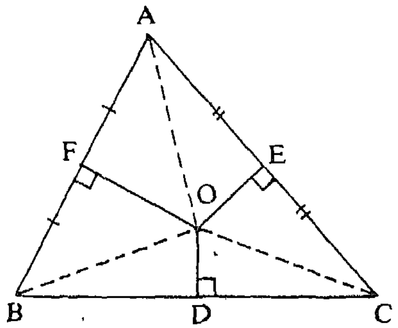
प्रमेय 12.3 की आकृति को देखने पर आप पाते हैं कि बिन्दु I, त्रिभुज की भुजाओं से समदूरस्थ है। केन्द्र I और त्रिज्या ID वाला वृत्त, D, E और F से होकर जाएगा।

प्रमेय 12.4 : *त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब-समद्विभाजक एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।*

दिया है : ΔABC में, भुजाओं AB और AC के लम्ब-समद्विभाजक बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं और $OD \perp BC$ खींचा गया है। (आकृति 12.20)

सिद्ध करना है : OD, BC का लम्ब-समद्विभाजक है।

रचना : OA, OB और OC को मिलाइए।



आकृति 12.20

उपपत्ति : $\because$ O, AB के लम्ब-समद्विभाजक पर स्थित है,

$\because$ $OA = OB$ ... (1)

$\because$ O, AC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है,

$\because$ $OA = OC$ ... (2)

(1) और (2) से,

$OB = OC$

$\therefore$ O, BC के लम्ब-समद्विभाजक पर स्थित है।

$\because$ $OD \perp BC$

$\therefore$ OD, BC का लम्ब-समद्विभाजक है।

परिभाषा : *त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब-समद्विभाजकों के संगामी बिन्दु को त्रिभुज का* ***परिकेन्द्र*** *(circumcentre) कहते हैं।*

टिप्पणी : त्रिभुज का परिकेन्द्र ज्ञात करने के लिए, उसकी दो भुजाओं के लम्ब-समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करना ही पर्याप्त होगा, क्योंकि उपरोक्त प्रमेय के आधार पर, तीसरी भुजा का लम्ब-समद्विभाजक भी, इस बिन्दु से होकर जायेगा।

प्रमेय की आकृति को देखने से पता चलता है कि बिन्दु O, त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिन्दुओं से समदूरस्थ है। केन्द्र O और त्रिज्या OA वाला वृत्त, तीनों शीर्षों से होकर जाता है।

प्रमेय 12.5 : *त्रिभुज के तीनों शीर्ष-लम्ब एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।*

दिया है : ΔABC में, AL, BM और CN, शीर्ष-लम्ब हैं। (आकृति 12.21)

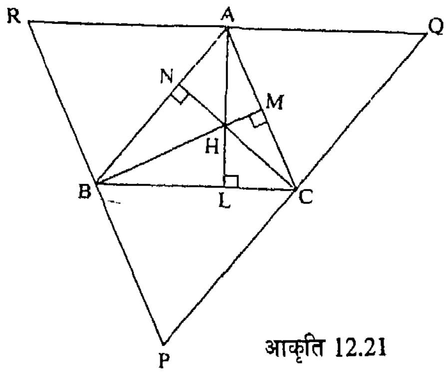
सिद्ध करना है : AL, BM और CN एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।

रचना : A, B और C से होती हुई क्रमशः BC, CA और AB के समांतर रेखाएं खींचिए। इस प्रकार ΔPQR बनता है, जिसके शीर्ष P, Q और R क्रमशः A, B और C के सम्मुख हैं।

उपपत्ति : चतुर्भुज $ABCQ$ में,

$AB \parallel QC$ (रचना)

$BC \parallel AQ$ (रचना)



आकृति 12.21

$\therefore$ $ABCQ$ एक समांतर चतुर्भुज है।

अतः $AQ = BC$ ... (1)

इसी प्रकार $BCAR$ एक समांतरचतुर्भुज है,

$\therefore AR = BC$ ... (2)

(1) और (2) से

$AQ = AR$ ... (3)

और $AL \perp BC$, तथा $BC \parallel RQ$

$\therefore AL \perp RQ$ ... (4)

(3) और(4) से

AL, QR का लम्ब-समद्विभाजक है।

इसी प्रकार,

BM, RP का लम्ब-समद्विभाजक है और CN, PQ का लम्ब-समद्विभाजक है।

इस प्रकार AL, BM और CN, Δ PQR की भुजाओं के लम्ब-समद्विभाजक हैं।

अतः AL, BM और CN एक ही बिन्दु मे होकर जाते हैं।

परिभाषा : *त्रिभुज के तीनों शीर्ष-लम्बों के संगामी बिन्दु को उस त्रिभुज का लम्ब केन्द्र (ortho centre) कहते हैं।*

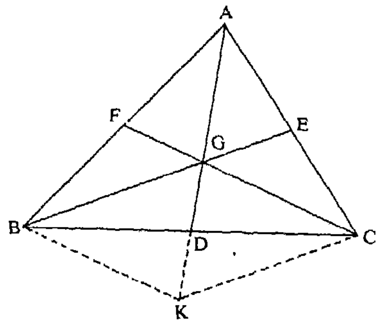
व्याख्या : उपरोक्त प्रमेय के आधार पर हम कह सकते हैं कि प्रत्येक त्रिभुज का एक लम्ब केन्द्र होता है और इसे ज्ञात करने के लिए, उसके दो शीर्ष-लम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करना पर्याप्त होता है। तीसरा शीर्षलम्ब तब स्वतः ही, उस बिन्दु से होकर जायेगा। क्या आप सोच सकते हैं कि समकोण त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहाँ होगा?

प्रमेय 12.6 : *त्रिभुज की माध्यिकाएं एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं, और वह बिन्दु प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।*

दिया है : Δ ABC में, माध्यिकाएं BE और CF, बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। AG को मिलाया गया है और AG को बढ़ाने पर वह BC को बिन्दु D पर मिलता है। (आकृति 12.22)

सिद्ध करना है : (i) $BD = DC$, और

(ii) $AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1$



आकृति 12.22

रचना : AD को K तक बढ़ाइए, जिससे कि $AG = GK$ हो।

KB और KC को मिलाइए।

उपपत्ति : आइये पहले (i) को सिद्ध करें।

Δ ABK में

F, AB का मध्य बिन्दु है। (दिया है)

G, AK का मध्य बिन्दु है। (रचना)

$\therefore FG \parallel BK$ ... (1)

और $FG = \frac{1}{2} BK$ ... (2)

इसी प्रकार, ΔACK में

$GE \parallel CK$ ... (3)

और $GE = \frac{1}{2} CK$ ... (4)

(1) और (3) से, चतुर्भुज $BKCG$ में,

$BK \parallel GC$ और $KC \parallel BG$,

$\therefore$ $BKCG$ एक समांतर चतुर्भुज है। ... (5)

अब समांतर चतुर्भुज $BKCG$ के विकर्ण BC और GK बिन्दु D पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं।

$\therefore$ BC और GK परस्पर D पर समद्विभाजित करते हैं।

अतः $BD = DC$ ... (6)

या AD, शीर्ष से खींची गई माध्यिका है।

आइए अब हम (ii) को सिद्ध करें।

हमें प्राप्त है,

$GD = DK = \frac{1}{2} GK$

परन्तु $GK = AK$ (रचना)

$\therefore$ $GD = \frac{1}{2} AG$

या $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$

या $AG : GD = 2 : 1$.

इसी प्रकार

$BG : GE = 2 : 1$ और

$CG : GF = 2 : 1$

अतः उपरोक्त निष्कर्षों को मिलाकर $AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1$

परिभाषा : *त्रिभुज की माध्यिकाओं के संगामी बिन्दु को त्रिभुज का केन्द्रक (centroid) कहते हैं।*

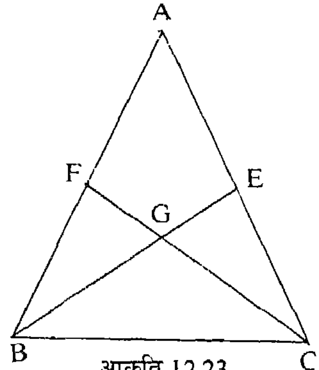
टिप्पणी : किसी त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात करने के लिए, उसकी किन्हीं दो माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करना पर्याप्त होगा, क्योंकि उपरोक्त प्रमेय के आधार पर,तीसरी माध्यिका भी उसी बिन्दु से होकर जायेगी।

उदाहरण 12.3 : सिद्ध कीजिए कि यदि किसी त्रिभुज की दो माध्यिकाएं बराबर हों, तो त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

हल :

दिया है : ΔABC में, BE और CF दो माध्यिकाएं हैं जो परस्पर बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं और $BE = CF$ (आकृति 12.23)।

सिद्ध करना है : ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।



आकृति 12.23

[**विश्लेषण :** त्रिभुज ABC को समद्विबाहु त्रिभुज सिद्ध करने के लिए $AB = AC$ दिखाना पर्याप्त होगा। और क्योंकि $BF = \frac{1}{2} AB$ और $CE = \frac{1}{2} AC$, यह दिखाना पर्याप्त होगा कि $BF = EC$। हम ऐसे दो त्रिभुजों को ज्ञात करेंगे, जिनकी भुजायें क्रमश: BF और CE हों। यह प्रतीत होता है कि $\Delta\ BGF$ और $\Delta\ CGE$ ऐसे ही दो त्रिभुज हैं। क्या ये सर्वांगसम हैं? सम्भवतः भुजा-कोण-भुजा अभिगृहीत लागू होता हो। हाँ, यह अभिगृहीत लागू होता है, क्योंकि $BG = \frac{2}{3}BE, CG = \frac{2}{3}\ CF,$ इत्यादि। अब हम उपपत्ति लिख सकते हैं।]

उपपत्ति : क्योंकि G, $\Delta\ ABC$ का केन्द्रक है, (दिया है)

$\therefore\ BG : GE = CG : GF = 2 : 1$

इसलिए $BG = \frac{2}{3}\ BE,\ GE = \frac{1}{3}\ BE$

और $CG = \frac{2}{3}\ CF,\ GF = \frac{1}{3}\ CF$

परन्तु $BE = CF$ (दिया है)

$\therefore\ BG = CG$ और $GE = GF$

अब $\Delta\ BGF$ और $\Delta\ CGE$ में,

$BG = CG$ (सिद्ध किया है)

$GF = GE$ (सिद्ध किया है)

$\angle BGF = \angle CGE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore\ \Delta\ BGF \cong\ \Delta\ CGE$ (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसम अभिगृहीत)

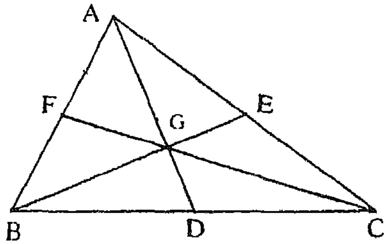
$\therefore\ BF = CE$

या, $2\ (BF) = 2\ (CE)$

$\therefore\ AB = AC$

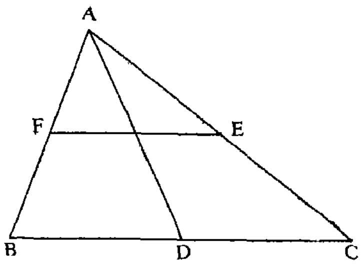
प्रश्नावली 12.3

1. त्रिभुज ABC में, माध्यिकाएं AD, BE और CF, बिन्दु G में से होकर जाती हैं। (आकृति 12.24)
   (क) यदि $BG = 6$, तो BE क्या होगा?
   (ख) यदि $FG = 4$, तो GC क्या होगा?
   (ग) यदि $AD = 7.5$, तो GD क्या होगा?



आकृति 12.24

2. ΔABC में, माध्यिकाएं AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। दिखलाइए कि $BE + CF > \frac{3}{2} BC$
   [**संकेत** :$BG + GC > BC$]
3. ΔABC में, माध्यिकाएं AD, BF और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। दिखलाइए कि
   $$4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$$
4. एक त्रिभुज की माध्यिकाएं परस्पर बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है।
5. ΔABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं। (आकृति 12.25) दिखलाइए कि AD, रेखाखण्ड EF को समद्विभाजित करता है।



आकृति 12.25

प्रश्नावली 12.4

1. यदि P, ΔABC का लम्ब-केन्द्र हो, तो दिखाइए कि A, ΔPBC का लम्ब-केन्द्र है।
2. समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AB = AC$ और D भुजा BC का मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि परिकेन्द्र, अंत:केन्द्र, लम्बकेन्द्र और केन्द्रक सभी एक ही रेखा AD पर स्थित हैं।

3. H, त्रिभुज ABC का लम्ब-केन्द्र है और X, Y और Z क्रमशः AH, BH और CH के मध्यबिन्दु हैं। दिखाइए कि H, ΔXYZ का भी लम्ब-केन्द्र है।
4. ΔABC में भुजा BC पर एक बिन्दु कैसे ज्ञात करेंगे जो भुजाओं AB और AC से सम दूरस्थ हो?
5. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की किन्हीं दो माध्यिकाओं का योगफल, तीसरी माध्यिका से अधिक होता है।

   [**संकेत** : G ΔABC का केन्द्रक है। एक ऐसे त्रिभुज को सोचिए जिसकी भुजाएं माध्यिकाओं के एक से अनुपात में हों। देखिए आकृति 12.22 प्रमेय 12.6]

अध्याय 13

क्षेत्रफल

13.1 भूमिका

आपको शब्द ''क्षेत्रफल'' (area) की कुछ जानकारी समतल आकृतियों के संदर्भ में पहले दी जा चुकी है। पिछली कक्षाओं में आप ने आयत, वर्ग, त्रिभुज, आदि का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखा है। आइए, 'क्षेत्रफल' की संकल्पना पर और विचार करें। इस से यह लाभ होगा कि औपचारिक ज्यामिति में, हम इस के बारे में वैसे ही बात कर सकेंगे और इसका अनुप्रयोग कर सकेंगे जैसे कि हमने रेखाखण्ड की लम्बाई के बारे में किया है। इस प्रक्रम में, हम क्षेत्रफल के उन सूत्रों को भी सिद्ध कर सकेंगे जिनका प्रयोग आप अब तक करते आये हैं।

13.2 बहुभुज प्रदेश

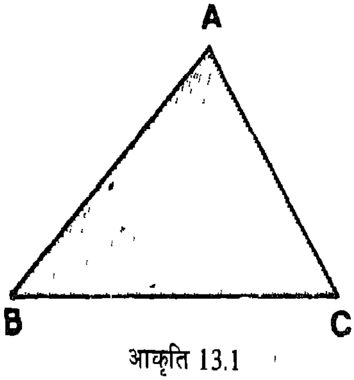
त्रिभुज एक समतल आकृति है। यह तीन रेखाखण्डों से बनी एक संवृत (closed) आकृति है। जैसा कि आप आसानी से देख सकते हैं दो रेखाखण्डों से एक संवृत आकृति नहीं बन सकती।

जब हम त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल पर विचार करते हैं, तो क्या आप का अभिप्राय तीन रेखाखण्डों AB, BC और CA के बारे में है? निस्सन्देह नहीं।

हमारा ध्यान समतल के उस भाग की ओर होता है जो त्रिभुज से घिरा है। (देखिए आकृति 13.1)। हम आपको निम्नलिखित दो नामों से परिचित करायेंगे :

तल के उस भाग को जो त्रिभुज से घिरा है, त्रिभुज का अभ्यंतर (interior of a triangle) कहते हैं।

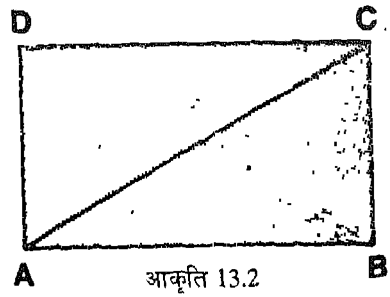
त्रिभुज और त्रिभुज के अभ्यंतर के सम्मिलन को त्रिभुजाकार प्रदेश (triangular region) कहते हैं।



आकृति 13.1

अब यह स्पष्ट है कि जब हम त्रिभुज के क्षेत्रफल की बात करते हैं तो हमारा अभिप्राय उस *त्रिभुजाकार प्रदेश के परिमाण* से होता है।

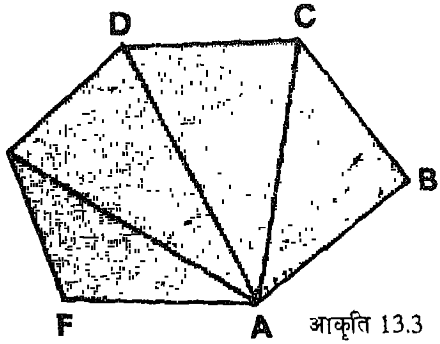
इसी प्रकार, *आयत का अभ्यन्तर* (interior of a rectangle) वह भाग है जो आयत से घिरा हो। और *आयतकार प्रदेश,* आयत और आयत के अभ्यन्तर का सम्मिलन होता है।



आकृति 13.2

ध्यान दीजिए कि हम आयताकार प्रदेश *ABCD* को दो त्रिभुजाकार प्रदेशों *ABC* और *ACD* के सम्मिलन के रूप में प्रकट कर सकते हैं (आकृति 13.2)। और ऐसा करने की केवल यही एक विधि नहीं है। आप आयताकार प्रदेश *ABCD* को दो या दो से अधिक त्रिभुजाकार प्रदेशों में अनेक प्रकार से बांट सकते हो।

बहुभुज और बहुभुज के अभ्यन्तर के सम्मिलन को *बहुभुज प्रदेश* (polygonal region) कहते हैं। इसे एक समतल में स्थित परिमित संख्या वाले ऐसे त्रिभुजाकार प्रदेशों के सम्मिलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है कि यदि इसमें से दो प्रतिच्छेद करें तो प्रतिच्छेदन या तो एक बिन्दु या एक रेखाखण्ड हो (आकृति 13.3)।



आकृति 13.3

13.3 बहुभुज प्रदेश का क्षेत्रफल

बहुभुज प्रदेश के क्षेत्रफल की संकल्पना और उसके गुणधर्म, रेखाखण्ड की लम्बाई की संकल्पना और उसके गुणधर्मों से बहुत कुछ मिलती जुलती है। दूसरे शब्दों में, हम चाहेंगे कि क्षेत्रफल की संकल्पना में वे सब गुणधर्म हों जो रेखाखण्ड की लम्बाई में हैं।

आप को याद होगा कि :

(i) प्रत्येक रेखाखण्ड AB के संगत एक धन वास्तविक संख्या होती है जिसे रेखाखण्ड की लम्बाई कहते हैं और संकेत $l(AB)$ या केवल AB से प्रकट करते हैं।

(ii) यदि AB और CD दो रेखाखण्ड हैं और $AB \cong CD$, तो $l(AB) = l(CD)$ या $AB = CD$

(iii) यदि AB और CD ऐसे दो रेखाखण्ड हैं कि रेखाखण्ड CD रेखाखण्ड AB में आविष्ट है तो $l(CD) \leq l(AB)$

(iv) यदि AB और BC ऐसे रेखाखण्ड हों कि $AB \cap BC$ एकल बिन्दु समुच्चय हो तथा $AC = AB \cup BC$, तो

$$l(AC) = l(AB) + l(BC)$$

अपने अनुभव के आधार पर आप आशा करते होंगे कि बहुभुज प्रदेशों के क्षेत्रफल भी इसी प्रकार से व्यवहार करते हैं; हम भी यह चाहेंगे कि वे ऐसा करें। हम, इन के संगत अभिगृहीतों के कथन नीचे दे रहे हैं।

I. क्षेत्रफल अभिगृहीत (Area Axiom)

प्रत्येक बहुभुज का क्षेत्रफल होता है। एक मीटर भुजा वाला एक मानक वर्गाकार प्रदेश होता है जिसे वर्ग मीटर कहते हैं; और जिसे क्षेत्रफल की इकाई मानते हैं। बहुभुज प्रदेश का क्षेत्रफल, वर्ग मीटरों में, एक धन वास्तविक संख्या होती है।

संकेतन : बहुभुज प्रदेश R के क्षेत्रफल को $ar(R)$ से प्रकट करते हैं। यदि $ar(R)$ वर्ग मीटरों में x हो, तो हम लिखेंगे

$$ar(R) = x \text{ मी}^2 \text{ (वर्गमीटर)}$$

II. सर्वांगसम क्षेत्रफल अभिगृहीत (Congruent Area Axiom)

यदि ΔABC और ΔPQR दो सर्वांगसम त्रिभुज हों, तो

$$ar(\text{प्रदेश } \Delta ABC) = ar(\text{प्रदेश } \Delta PQR)$$

III. क्षेत्रफल एकदिष्ट अभिगृहीत (Area Monotone Axiom)

यदि R_1, R_2 दो बहुभुज प्रदेश हों और $R_1 \subset R_2$ तो $ar(R_2) \leq ar(R_1)$

IV. क्षेत्रफल योग अभिगृहीत (Area Addition Axiom)

यदि R_1 और R_2 दो बहुभुज प्रदेश हों, जिनके सर्वनिष्ठ परिमित संख्या में बिन्दु और रेखाखण्ड हो और $R = R_1 \cup R_2$, तो

$$ar(R) = ar(R_1) + ar(R_2)$$

V. आयताकार प्रदेश का क्षेत्रफल अभिगृहीत (Area of a Rectangular Region Axiom)

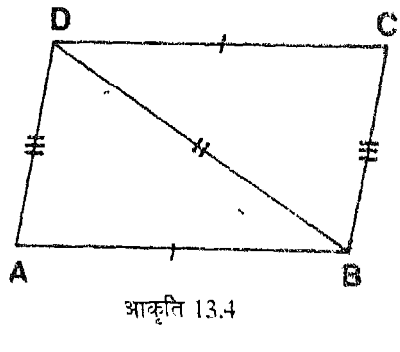
यदि $AB = a$ मी, $AD = b$ मी तो, ar (आयताकार प्रदेश $ABCD$) $= ab$ मी²। आगे जहां भी बहुभुज प्रदेश के क्षेत्र का प्रयोग किया जाएगा वहाँ यही समझा जाएगा कि वह क्षेत्रफल उपरोक्त अभिगृहीत के अनुसार है।

टिप्पणी : जैसा कि हमने पहले कहा था, जब हम त्रिभुज के क्षेत्रफल की बात करते हैं, तो वास्तव में हमारा अभिप्राय उसके त्रिभुजाकार प्रदेश से होता है। यही बात हम आगे भी मानते रहेंगे। इस प्रकार बहुभुज P के क्षेत्रफल से अभिप्राय उस बहुभुज प्रदेश P के क्षेत्रफल से होगा जो आकृति P से घिरा है।

प्रमेय : *समांतरचतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण इसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बांटता है।*

दिया है : समांतरचतुर्भुज $ABCD$ मे BD एक विकर्ण है (आकृति 13.4)।

सिद्ध करना है : $ar(\Delta ABD) = ar(\Delta BDC)$



आकृति 13.4

उपपत्ति : त्रिभुजों ABD और CDB में,

$AB = CD$ ($\|^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

$AD = CB$ ($\|^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

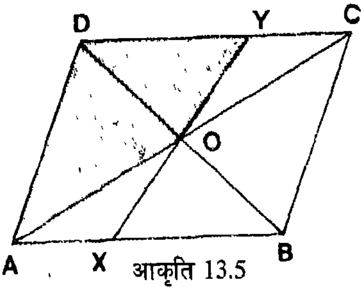
$BD = BD$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDB$ (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसम प्रमेय)

अतः $ar(\Delta ABD) = ar(\Delta CDB)$ (सर्वांगसम क्षेत्रफल अभिगृहीत)

उदाहरण 13.1 : समांतर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O से होकर जाती हुई एक रेखा AB को X पर और सम्मुख भुजा CD को Y पर प्रतिच्छेदित करती है; (आकृति 13.5)। दिखाइए कि

$$ar(\square AXYD) = \frac{1}{2}\, ar(\|^{gm}\ ABCD)$$



आकृति 13.5

हल : [विश्लेषण : आइए देखें कि इसे कैसे सिद्ध कर सकते हैं। AC, $\|^{gm}$ $ABCD$ का एक विकर्ण है। अब यदि $ar(\square AXYD) = \frac{1}{2}\, ar(\|^{gm}\ ABCD)$, तो $ar(\square AXYD) = ar(\Delta ACD)$ दोनों क्षेत्रों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि दोनों में प्रदेश $\square AOYD$ उभयनिष्ठ है। इससे यह पता चलता है कि $ar(\Delta AOX)$ और $ar(COY)$ बराबर होने चाहियें। क्या ऐसा संभव है? क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं? थोड़ा सोचने पर ज्ञात होता है कि वे सर्वांगसम हैं। अब हम परिणाम सिद्ध कर सकते हैं।]

उपपत्ति : क्योंकि AC, $\|^{gm}$ $ABCD$ का विकर्ण है,

$$\therefore ar(\Delta ACD) = \frac{1}{2}\, ar(\|^{gm}\ ABCD) \quad \ldots (1)$$

अब त्रिभुजों AOX और COY में,

$AO = CO$ (||gm के विकर्ण समद्विभाजित करते हैं)

$\angle AOX = \angle COY$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle OAX = \angle OCY$ (एकान्तर अन्तः कोण, AB || DC)

$\therefore \Delta AOX \cong \Delta COY$ (कोण-भुजा-कोण सर्वांगसम प्रमेय)

अतः $ar(\Delta AOX) = ar(\Delta COY)$ (सर्वांगसम क्षेत्रफल अभिगृहीत) ... (2)

(2) के दोनों ओर $ar(\square AOYD)$ योग करने पर

$$ar(\square AOYD) + ar(\Delta AOX) = ar(\square AOYD + ar(\Delta COY)$$

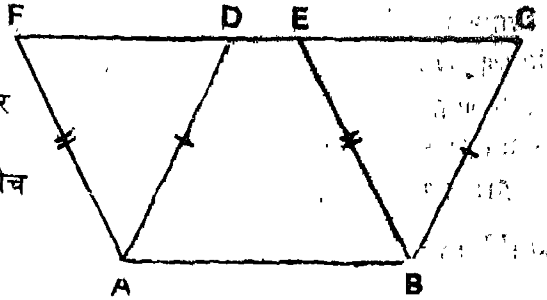
या $ar(\square AXYD) = ar(\Delta ACD)$

$$= \frac{1}{2}\, ar(\|^{gm} ABCD)$$

13.4 समांतरचतुर्भुज का क्षेत्रफल

प्रमेय 13.3 : *एक ही आधार पर और समान समांतर रेखाओं के बीच के समांतरचतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।*

दिया है : दो समांतरचतुर्भुज *ABCD* और *ABEF,* जिनका आधार *AB* है और जो समांतर रेखाओं *AB* और *DE* के बीच में हैं। (आकृति 13.6)



आकृति 13.6

सिद्ध करना है : $ar(\|^{gm} ABCD) = ar(\|^{gm} ABEF)$

उपपत्ति : $ar(\|^{gm} ABCD) = ar(\square ABED) + ar(\Delta CBE)$

(क्षेत्रफल योग अभिगृहीत) ...(1)

$ar(\|^{gm} ABEF) = ar(\square ABED) + ar(\Delta DAF)$

(क्षेत्रफल योग अभिगृहीत) ...(2)

अब ΔCBE और ΔDAF में,

$CB = DA$ ($\|^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

$BE = AF$ ($\|^{gm}$ की सम्मुख भुजाएं)

$\angle CBE = \angle DAF$ ($BC \parallel AD, BE \parallel AF$)

$\therefore \Delta CBE \cong \Delta DAF$ (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसम अभिगृहीत)

अतः $ar(\Delta CBE) = ar(\Delta DAF)$ ... (3)

(1), (2) और (3) से

$ar(\|^{gm} ABCD) = ar(\|^{gm} ABEF)$

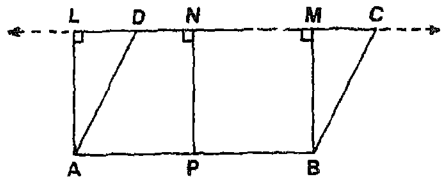
13.4.1 समांतर चतुर्भुज का आधार और शीर्षलम्ब

परिभाषा : *समांतरचतुर्भुज का आधार (base) इसकी कोई भी एक भुजा होती है।*

परिभाषा : *समांतरचतुर्भुज के प्रत्येक आधार के संगत शीर्ष-लम्ब (altitude) वह रेखाखण्ड है जो*

आधार के किसी बिन्दु से सम्मुख भुजा को आविष्ट करने वाली रेखा पर लम्ब हो।

साथ की आकृति में, *ABCD* एक समांतर चतुर्भुज है, भुजा *AB* इस का आधार है और *AL, BM* अथवा *PN* इसके संगत शीर्षलम्ब हैं।



आकृति 13.7

परिभाषा : *समांतर चतुर्भुज के आधार की लम्बाई को भी आधार कहते हैं; उसके संगत शीर्ष लम्ब की लम्बाई को संगत शीर्ष लम्ब कहते हैं।*

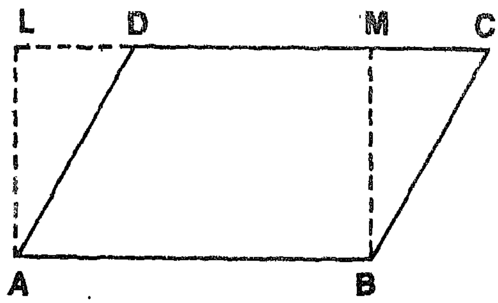
प्रमेय 13.3 : समांतरचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी किसी एक भुजा और संगत शीर्षलम्ब के गुणनफल के बराबर होता है।

दिया है : *ABCD* एक समांतरचतुर्भुज है। भुजा *AB* के संगत *AL* शीर्षलम्ब है।

सिद्ध करना है : $ar\ (||^{gm}\ ABCD) = AB \times AL$

रचना : आयत *ALMB* बनाइए। (आकृति 13.8)

उपपत्ति : $||^{gm}$ *ABCD* और आयत *ALMB,* एक ही आधार *AB* पर और समान समांतर रेखाओं के बीच हैं।



आकृति 13.8

$\therefore\ ar\ (||^{gm}\ ABCD) = ar$ (आयत *ALMB*)

अब

ar (आयत *ALMB*) $= AB \times AL$ (आयत क्षेत्रफल अभिगृहीत)

$\therefore\ ar\ (||^{gm}\ ABCD) = AB \times AL$

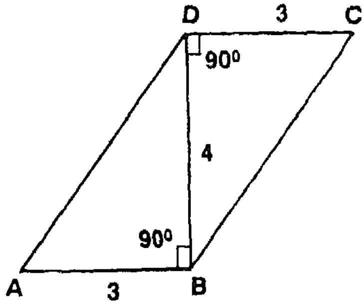
उप-प्रमेय : *समान आधार के और समान समांतर रेखाओं के बीच के समांतरचतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।*

विद्यार्थी के अभ्यासार्थ इसकी उपपत्ति छोड़ दी गई है।

[**संकेत :** शीर्षलम्ब भी बराबर हैं। क्यों?]

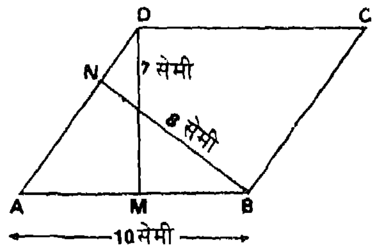
प्रश्नावली 13.1

1. *ABCD* एक चतुर्भुज है और *BD* इसका एक विकर्ण है, जैसा कि आकृति 13.9 में दिखाया गया है। दिखाइए कि □ *ABCD* एक समांतर-चतुर्भुज है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.9

2. समांतरचतुर्भुज *ABCD* में, $AB = 10$ सेमी, भुजाओं *AB* और *AD* के संगत शीर्ष लम्ब क्रमशः 7 सेमी और 8 सेमी हैं। (आकृति 13.10) *AD* ज्ञात कीजिए।
3. सिद्ध कीजिए कि समांतरचतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाला रेखाखण्ड समांतरचतुर्भुज को बराबर क्षेत्रफल वाले दो समांतरचतुर्भुजों में बांट देता है।
4. सिद्ध कीजिए कि दी हुई भुजाओं वाले सभी समांतरचतुर्भुजों में सब से अधिक क्षेत्रफल वाला समांतरचतुर्भुज एक आयत होता है।

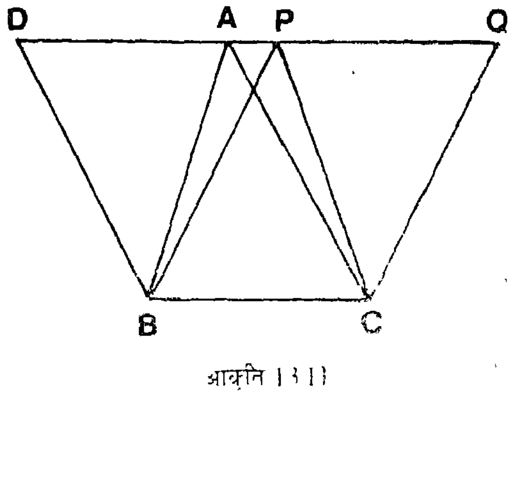


आकृति 13.10

13.5 त्रिभुज का क्षेत्रफल

प्रमेय 13.4 : *एक ही आधार और समान समांतर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।*

दिया है : दो त्रिभुज *ABC* और *PBC* जो एक आधार *BC* पर और समान समांतर रेखाओं *BC* और *AP* के बीच में हैं (आकृति 13.11)।



आकृति 13.11

सिद्ध करना है : $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta PBC)$

रचना : B से होती हुई $BD \parallel CA$ और C से होती हुई $CQ \parallel BP$ खींचिए जो रेखा AP को क्रमशः D और Q पर प्रतिच्छेदित करती हों (आकृति 13.11)।

उपपत्ति : □ $BCQP$ एक समांतरचतुर्भुज है। (रचना)

□ $BCAD$ एक समांतरचतुर्भुज है। (रचना)

अब $\|^{gm}$ $BCQP$ और $\|^{gm}$ $BCAD$ एक ही आधार BC पर और समान समांतर रेखाओं के बीच हैं।

$\therefore\ ar(\|^{gm}\ BCQP) = ar(\|^{gm}\ BCAD)$ ... (1)

अब CP $\|$ gm BCQP का विकर्ण है।

$\therefore\ ar(\Delta PBC) = ar(\Delta CQP)$

$= \frac{1}{2}\ ar(\|^{gm} BCQP)$ ... (2)

इसी प्रकार,

$ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\ ar(\|^{gm}\ BCAD)$ ... (3)

(1), (2) और (3) से

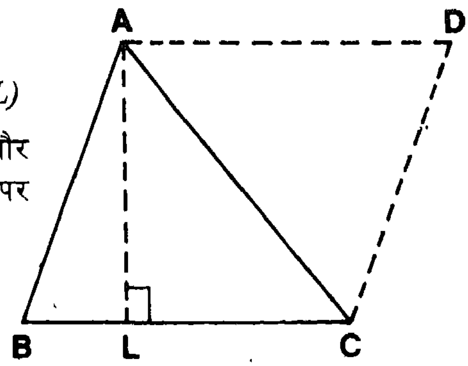
$ar(\Delta PBC) = ar(\Delta ABC)$

उप-प्रमेय 1 : *त्रिभुज का क्षेत्रफल, उसकी किसी भुजा और संगत शीर्षलम्ब के गुणनफल का आधा होता है।*

दिया है : ΔABC में AL भुजा BC पर शीर्षलम्ब है। (आकृति 13.12)

सिद्ध करना है : $ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2}(BC) \times (AL)$

रचना : C और A से होती हुई क्रमशः BA और BC के समांतर रेखाएं खींचिए जो परस्पर D पर प्रतिच्छेद करती हों। (आकृति 13.12)



आकृति 13.12

उपपत्ति : $ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है। (रचना)

AC, $||^{gm}$ $ABCD$ का विकर्ण है।

$\therefore\ ar\,(\Delta\ ABC) = \frac{1}{2}\ ar\,(\,||^{gm}\ \ ABCD)$ ... (1)

अब, $||^{gm}$ $ABCD$ में, BC आधार और AL संगत शीर्ष लम्ब है।

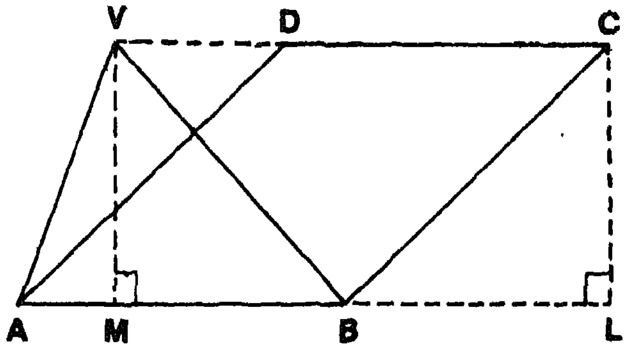
$\therefore\ ar\,(\,||^{gm}\ ABCD) = BC \times AL$ ... (2)

(1) और (2) से

$$ar\,(\Delta\ ABC) = \frac{1}{2}\ BC \times AL$$

उप-प्रमेय - 2 : *यदि एक त्रिभुज और एक समांतरचतुर्भुज, एक ही आधार पर और समान समांतर रेखाओं के बीच में हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल, समांतरचतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।*

दिया है : $\Delta\ VAB$ और $||^{gm}$ $ABCD$, ऐसे हैं कि V, D और C संरेख हैं। (आकृति 13.13)।



आकृति 13.13

सिद्ध करना है : $ar\,(\Delta\ VAB) = \frac{1}{2}\ ar\,(||^{gm}\ ABCD)$

रचना : $CL \perp AB$ खींचिए जो रेखा AB के बिन्दु L पर मिलती है, और $VM \perp AB$, जो रेखा AB को बिन्दु M पर मिलती हैं।

उपपत्ति : V, D और C संरेख हैं और $DC \parallel AB$,

$\therefore\ VM = CL$ (समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी) ... (1)

अब $ar\,(\Delta\ VAB) = \frac{1}{2}\ VM \times AB$ ... (2)

$ar\,(||^{gm}\ ABCD) = CL \times AB$ ... (3)

(1), (2) और (3) से

$$ar\,(\Delta\ VAB) = \frac{1}{2}\ ar\,(||\ ^{gm}\ ABCD)$$

उप-प्रमेय 3 : *समलम्ब का क्षेत्रफल, उसके शीर्षलम्ब और समांतर भुजाओं के योगफल के गुणनफल का आधा होता है।*

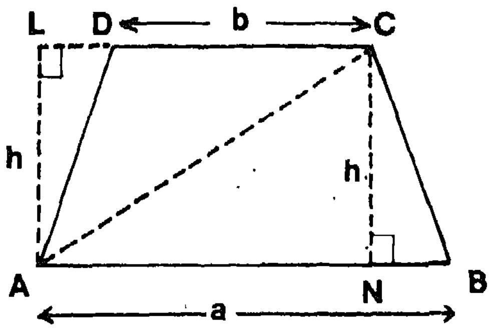
दिया है : समलम्ब $ABCD$, जिसमें $AB \parallel CD$

$AL \perp DC$ और $CN \perp AB$ है।

$AB = a, DC = b, AL = CN = h$ (मान लीजिए)।

सिद्ध करना है : ar (समलम्ब $ABCD$) $= \frac{1}{2} h \times (a + b)$

रचना : AC को मिलाइए। (आकृति 13.14)



आकृति 13.14

उपपत्ति : AC, $\square ABCD$ का विकर्ण है।

$\therefore$ ar (समलम्ब $ABCD$) $= ar(\Delta ABC) + ar(\Delta ACD)$

अब,

$ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} h \times a$

$ar(\Delta ACD) = \frac{1}{2} h \times b$

$\therefore$ ar (समलम्ब $ABCD$) $= \frac{1}{2} h \times a + \frac{1}{2} h \times b$

$= \frac{1}{2} h \times (a + b)$

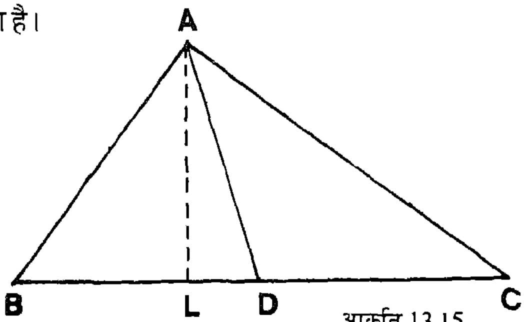
उदाहरण 13.2 : दिखाइए कि त्रिभुज की कोई माध्यिका उसको बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बांटती है।

हल : ΔABC में, AD उसकी एक माध्यिका है। (आकृति 13.15)

हमें यह दिखाना है, कि

$ar(\Delta ABD) = ar(\Delta ADC)$

क्योंकि ΔABD और ΔADC, के आधार समान हैं, और उनका समान शीर्ष लम्ब है

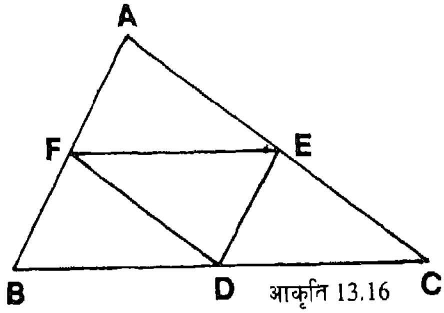


आकृति 13.15

$\therefore\ ar(\Delta ABD) = ar(\Delta ADC)$

उदाहरण 13.3 : यदि D, E और F क्रमशः त्रिभुज ΔABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिन्दु हों, तो सिद्ध कीजिए कि $BDEF$ एक समांतरचतुर्भुज है जिसका क्षेत्रफल, ΔABC के क्षेत्रफल का आधा है। यह भी दिखाइए कि

$$ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4}\ ar(\Delta ABC)$$



आकृति 13.16

हल : [विश्लेषण : मान लीजिए DE, EF और FD को मिलाया गया है। ध्यान दीजिए कि ΔABC, चार छोटे त्रिभुजों में बंट गया है। हमें यह दिखाना है कि □ $BDEF$ एक समांतरचतुर्भुज है। क्या $FE \parallel BD$ और $ED \parallel FB$? पहले हम, '$FE \parallel BD$' पर विचार करेंगे।

हाँ, यह तो एक प्रमेय का परिणाम है। और फिर उसी से $ED \parallel FB$ भी सिद्ध होता है। इस प्रकार $BDEF$ एक समांतरचतुर्भुज है। अब हम क्षेत्रफल के संबंधों पर विचार करें। स्पष्ट है कि

$ar(\parallel^{gm} BDEF) = ar(\Delta BDF) + ar(DEF)$

परन्तु FD तो विकर्ण है, अतः $ar(\parallel^{gm} BDEF) = 2(\Delta DEF)$

यह एक प्रकार की सममिति है। यदि $ar(\Delta BDF) = ar(\Delta DEF)$, तो हम यह भी दिखा सकते हैं कि

$ar(\Delta DEF) = ar(\Delta BDF) = ar(\Delta DCE) = ar(\Delta AEF)$। ΔABC इन चारों छोटे-छोटे त्रिभुजों से मिलकर बना है। अब हम उपपत्ति दे सकते हैं।

उपपत्ति : ΔABC में, F और E क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore\ FE \parallel BD$

इसी प्रकार $ED \parallel FB$

$\therefore\ BDEF$ एक समांतरचतुर्भुज है। ... (1)

FD, $||^{gm}$ $BDEF$ का विकर्ण है।

$\therefore ar(\Delta FBD) = ar(DEF)$ ... (2)

इसी प्रकार E, D भुजाओं AC और BC के क्रमशः मध्यबिन्दु हैं,

$\therefore ar(\Delta EDC) = ar(\Delta DEF)$ ... (3)

बिन्दुओं F और D के साथ साथ इसी तर्क को लागू करने पर,

$ar(\Delta AFE) = ar(\Delta EFD)$ ... (4)

चूँकि ΔABC, चार अनतिव्यापी (non-overlapping) त्रिभुजों AEF, DEF, BDF और DCE में बंटा हुआ है।

अतः

$$ar(\Delta ABC = ar(AFE) + ar(\Delta BDF) + ar(\Delta DCE) + ar(DEF) \quad ...(5)$$

(2), (3), (4) और (5) से $ar(\Delta ABC) = 4\, ar(\Delta DEF)$

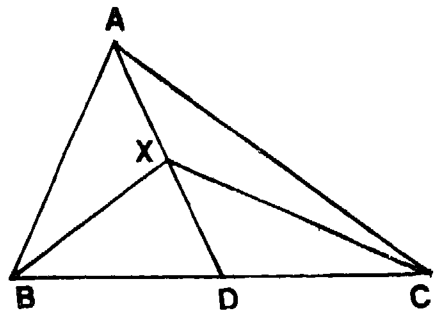
या $ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4}\, ar(\Delta ABC)$ ... (6)

(2) और (6) से

$$ar(||^{gm} BDEF) = ar(\Delta DEF) + ar(\Delta FBD)$$
$$= 2\, ar(DEF)$$
$$= 2.\frac{1}{4}\, ar(\Delta ABC)$$
$$= \frac{1}{2}\, ar(\Delta ABC) \quad ...(7)$$

परिणाम (1), (7) और (6) वे परिणाम हैं जिन्हें सिद्ध करना था।

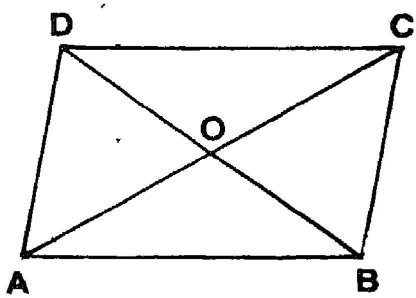
प्रश्नावली 13.2



आकृति 13.17

1. AD, त्रिभुज ABC की माध्यिका है। AD पर X कोई बिन्दु है (आकृति 13.17)। दिखाइए कि $ar(\Delta ABX) = ar(\Delta ACX)$
2. सिद्ध कीजिए कि, समांतर चतुर्भुज के विकर्ण, इसे बराबर क्षेत्रफल वाले चार त्रिभुजों में बांटते हैं (आकृति 13.18)।

एक चतुर्भुज है और इसके विकर्ण BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद सिद्ध कीजिए कि यदि $BO = OD$ $\Delta\ ABC$ और $\Delta\ ADC$ के क्षेत्रफल हैं।



आकृति 13.18

$PQRS$ के अंतरंग के एक बिन्दु O को न्दुओं से मिलाया गया है। सिद्ध कीजिए प्रकार बने दो सम्मुख त्रिभुजों के का योग, शेष दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के बराबर है।

कि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा होता

$ABCD$ और आयत $ABEF$ का एक ही आधार AB है और उनके त बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि समांतरचतुर्भुज का परिमाप, आयत के परिमाप से

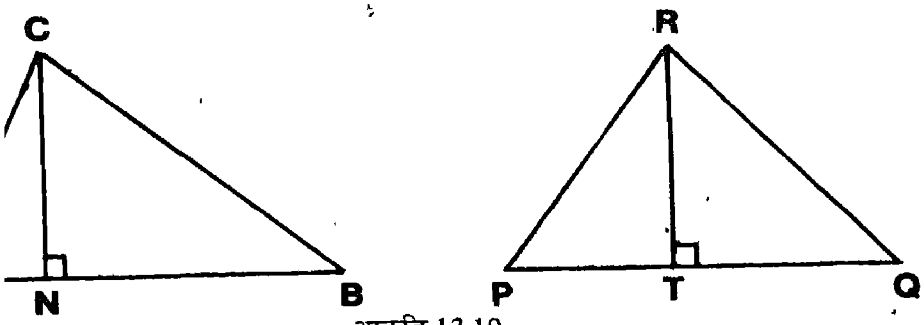
दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों और एक त्रिभुज की एक भुजा, दूसरे त्रिभुज की एक हो, तो उन के संगत शीर्षलम्ब बराबर होते हैं।

ो त्रिभुजों ABC और PQR, जिनमें

(1) $ar\ (\Delta\ ABC) = ar\ (\Delta\ PQR)$ और

(2) $AB = PQ$

(3) CN और RT क्रमशः त्रिभुजों ABC और PQR में, AB और PQ के संगत शीर्षलम्ब हैं (आकृति 13.19)।



आकृति 13.19

सिद्ध करना है : $CN = RT$

उपपत्ति : $\Delta\ ABC$ में, भुजा AB के संगत CN शीर्षलम्ब है,

$$\therefore\ ar(\Delta\ ABC) = \frac{1}{2}\ AB \times CN \qquad \text{... (1)}$$

इसी प्रकार,

$$ar(\Delta\ PQR) = \frac{1}{2}\ PQ \times RT \qquad \text{... (2)}$$

क्योंकि $ar(\Delta\ ABC) = ar(\Delta\ PQR)$ (दिया है)

$$\therefore\ \frac{1}{2}\ AB \times CN = \frac{1}{2}\ PQ \times RT$$

और क्योंकि, $AB = PQ$ (दिया है)

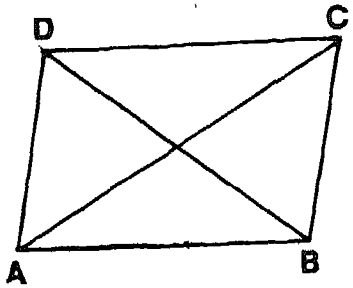
$\therefore\ CN = RT$

उदाहरण 13.5 : यदि चतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण इसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बांटता हो तो दिखलाइए कि वह चतुर्भुज एक समांतरचतुर्भुज होता है।

हल : [विश्लेषण : मान लीजिए चतुर्भुज $ABCD$ दिया है जिससे कि

$ar(\Delta\ ABC) = ar(\Delta\ ACD)$

और $ar(\Delta\ ABD) = ar(\Delta\ BCD)$ (आकृति 13.20)



आकृति 13.20

यह दिखाने के लिए कि $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है, हमें दिखाना है कि, $AB \parallel DC$ और $AD \parallel BC$। क्या $AB \parallel DC$? $ar(\Delta\ ABD)$ और $ar(\Delta\ ABC)$ पर ध्यान दीजिए। यदि $AB \parallel DC$, तो $ar(\Delta\ ABD) = ar(\Delta\ ABC)$। क्या इसका विलोम भी सत्य है? हां। क्योंकि $\Delta\ ABD$ और $\Delta\ ABC$ का एक ही आधार है, इसलिए यदि उनके क्षेत्रफल बराबर है तो उनके शीर्ष लम्ब भी बराबर होंगे। अब, क्या $ar(\Delta\ ABD)$ और $(\Delta\ ABC)$ बराबर है? क्या $ar(\square\ ABCD)$ उपयोगी सिद्ध हो सकता है? हां यह उपयोगी है। तो अब हम उपपत्ति दे सकते हैं।]

उपपत्ति : क्योंकि $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta ACD)$

और $ar(\Delta ABC) + ar(\Delta ACD) = ar(\square ABCD)$

$\therefore\ ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\ ar(\square ABCD)$ ... (1)

इसी प्रकार, $ar(\Delta ABD) = \frac{1}{2}\ ar(\square ABCD)$ ... (2)

(1) और (2) से

$ar(\Delta ABC) = ar(\Delta ABD)$ ...(3)

(3) से क्योंकि ΔABC और ΔABD एक ही आधार AB पर हैं,

$\therefore$ ΔABC का शीर्ष C से शीर्षलम्ब = ΔABD का D से शीर्षलम्ब

$\therefore\ DC \parallel AB$

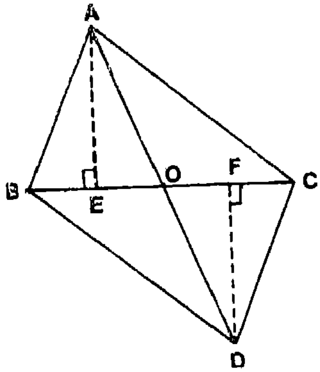
इसी प्रकार,

$AD \parallel BC$

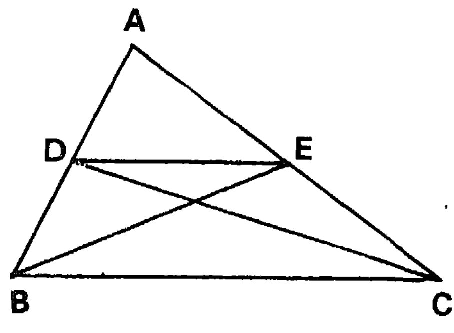
अतः $\square ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्नावली 13.3

1. दो त्रिभुज ABC और DBC, एक ही आधार BC पर हैं, और उन के शीर्ष A और D, रेखा BC के विपरीत ओर स्थित हैं जिससे कि $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta DBC)$ (आकृति 13.21)। दिखाइए कि BC, रेखाखण्ड AD को समद्विभाजित करता है।



आकृति 13.21



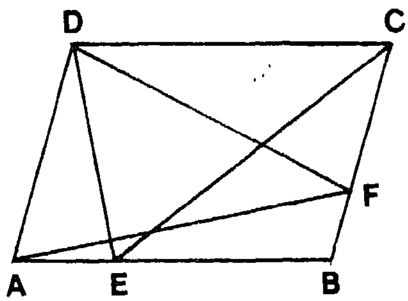
आकृति 13.22

2. ΔABC की भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु, क्रमशः D और E हैं और $ar(\Delta BCE) = ar(\Delta BCD)$ (आकृति 13.22)। सिद्ध कीजिए कि $DE \parallel BC$

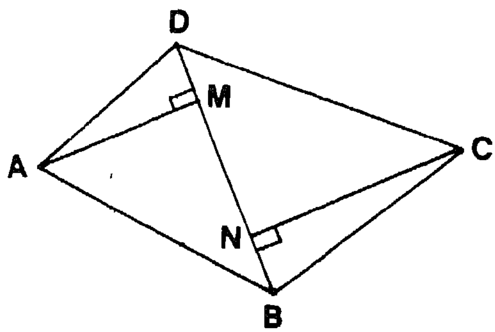
3. चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं और इस प्रकार वे चतुर्भुज को बराबर क्षेत्रफल वाले चार त्रिभुजों में बांट देते हैं। दिखाइए कि $\square ABCD$ एक समांतरचतुर्भुज है।

प्रश्नावली 13.4

1. समांतर चतुर्भुज $ABCD$ में, E और F दो बिन्दु हैं, जो क्रमशः भुजाओं AB और BC पर स्थित हैं (आकृति 13.23)। दिखाइए कि $ar\,(\Delta\ ADF) = ar\,(\Delta\ DCE)$



आकृति 13.23



आकृति 13.24

2. BD, चतुर्भुज $ABCD$ का एक विकर्ण है। AM और CN क्रमशः A और C से BD पर डाले गए लम्ब हैं (आकृति 13.24)। दिखाइए कि

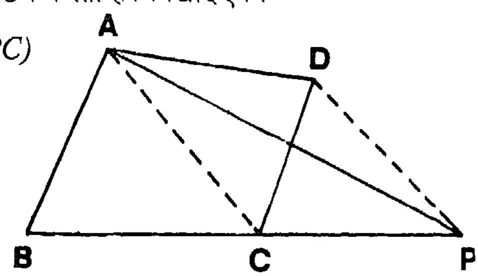
$$ar\,(\square\ ABCD) = \frac{1}{2}\ BD\,(AM + CN)$$

3. $\Delta\ ABC$ की माध्यिकाएं बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। दिखाइए कि

$$ar\,(\Delta\ AGB) = \frac{1}{3}\ ar\,(\Delta\ ABC)$$

4. $ABCD$ एक चतुर्भुज है। D से होकर जाने वाली एक रेखा, AC के समांतर, बढ़ाई गई रेखा BC को P पर मिलती है (आकृति 13.25)। सिद्ध कीजिए कि

$$ar\,(\Delta\ ABP) = ar\,(\square\ ABCD)$$



आकृति 13.25

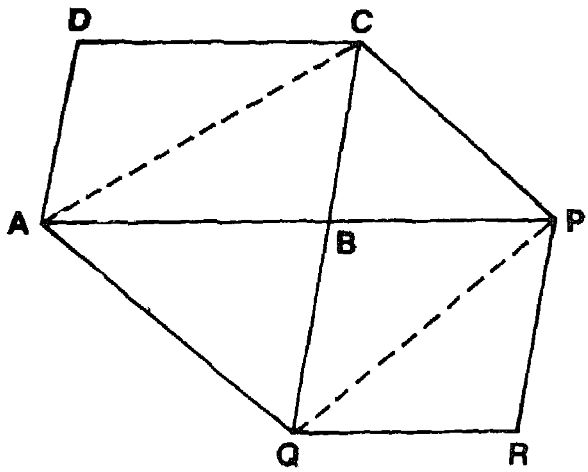
5. $\Delta\ ABC$ की भुजा BC के समांतर एक रेखा XY हैं। $BE \parallel AC$ और $CF \parallel AB$, रेखा XY को क्रमशः E और F पर काटती हैं। सिद्ध कीजिए कि,

$$ar(\Delta\ ABE) = ar(\Delta\ ACF)$$

6. समांतरचतुर्भुज $ABCD$ में, भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु क्रमशः E, F, G और H हैं। सिद्ध कीजिए कि चतुर्भुज $EFGH$ एक समांतरचतुर्भुज है और इसका क्षेत्रफल समांतरचतुर्भुज $ABCD$ के क्षेत्रफल का आधा है।
7. दो बिन्दु A और B; और वास्तविक संख्या x दिये हों, तो एक ऐसे बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए, जिससे कि $ar(\Delta\ PAB) = x$
8. समांतरचतुर्भुज $ABCD$ की भुजा AB को बिन्दु P तक बढ़ाया गया है। बिन्दु A से होती हुई CP के समांतर खींची गई एक रेखा CB को बढ़ाने पर उसे बिन्दु Q पर प्रतिच्छेद करती है। समांतरचतुर्भुज $PBQR$ को पूरा किया गया है (आकृति 13.26)। दिखाइए कि,

   $ar(\|^{gm}\ ABCD) = ar(\|^{gm}\ PBQR)$

   [**संकेत :** AC और PQ को मिलाइए। $\Delta\ AQC$ और $\Delta\ AQP$ की तुलना कीजिए।]



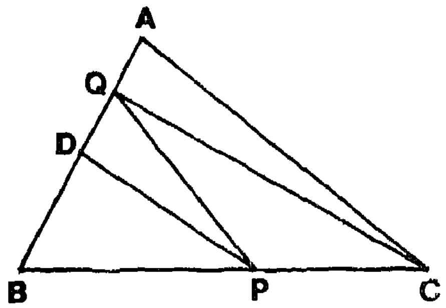
आर्कृति 13.26

9. $\Delta\ ABC$ के आधार BC पर D कोई बिन्दु है। AD को E तक बढ़ाया गया है, जिससे कि $AD = DE$ है। दिखाइए कि,

$$ar(\Delta\ BCE) = ar(\Delta\ ABC)$$

10 ΔABC में, D भुजा AB का मध्य बिन्दु है। और P, BC पर कोई बिन्दु है। $CQ \parallel PD$, भुजा AB को बिन्दु Q पर प्रतिच्छेद करता है (आकृति 13.27)। सिद्ध कीजिए कि,

$$ar(\Delta BPQ) = \frac{1}{2}\, ar(\Delta ABC)$$



आकृति 13.27

अध्याय 14

ज्यामितीय रचनाएं

14.1 भूमिका

प्रमेय सिद्ध करते समय या उन पर आधारित प्रश्नों को हल करते समय आप ने बहुधा जो आकृतिया बनाई हैं, वे केवल साधारण चित्र थे। उनका एक मात्र उद्देश्य आकृति के बारे में जानकारी प्राप्त करने में सहायता प्रदान करना था और आकृति बिलकुल ठीक-ठीक बनी है कि नहीं इसका महत्व नहीं था क्योंकि प्रमेय की उपपत्ति आकृति की परिशुद्धता पर निर्भर नहीं करती।

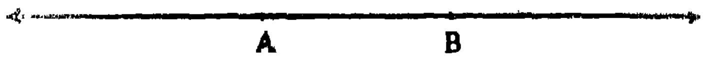
किन्तु आकृति के बारे में दिये गए तथ्यों द्वारा एक यथार्थ और शुद्ध आकृति बनाने के कौशल का अपना ही एक लाभ है। यह वह कौशल है जिसकी आवश्यकता सभी व्यवसाय के लोगों को समय समय पर पड़ती रहती है।

ज्यामिति की किसी आकृति का चित्र बनाने (ज्यामितीय चित्रण) और आकृति की रचना करने (ज्यामितीय रचना) में अन्तर है जिसे समझ लेना आवश्यक है। आकृति चित्रण में, सभी उपलब्ध और सुविधा जनक यन्त्रों, जैसे अंशांकित रूलर (graduated ruler), प्रोट्रैक्टर (protractor), सेट स्क्वायर (set-squares) इत्यादि का प्रयोग करना होता है। परन्तु, आकृति रचना में केवल दो यन्त्रों, अनाशांकित रूलर और परकार,का प्रयोग करना होता है। अनाशांकित रूलर और परकार द्वारा बनाई गई आकृतियां, दूसरे यन्त्रों द्वारा बनाई गई आकृतियों की अपेक्षा अधिक यथार्थ होती हैं। एक ज्यामितीय रचना में तर्क तथा कौशल दोनों का समावेश होता है। आगे हम कुछ ज्यामितीय रचनाओं का वर्णन करेंगे।

14.2 आधारभूत रचनाएं

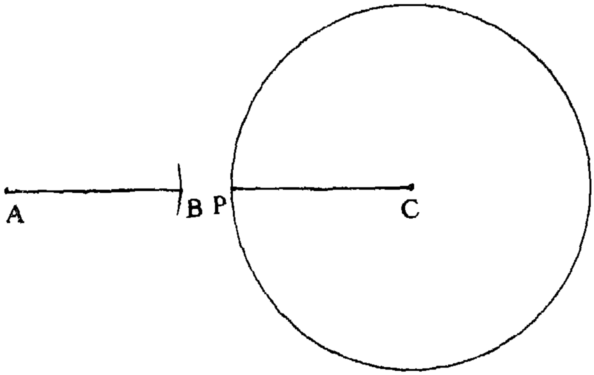
यदि किसी ज्यामितीय रचना को चरणों में बांट दिया जाए, तो वह निम्नलिखित आधारभूत रचनाओं में से किसी एक या एक से अधिक रचना पर निर्भर करती है।

रेखा-रचना : *दिए हुए दो बिन्दुओं से होती हुई एक और केवल एक रेखा की रचना की जा सकती है* (आकृति 14.1)।

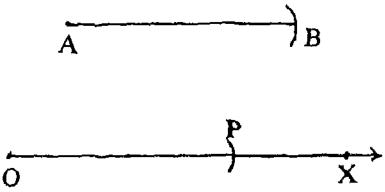


आकृति 14.1

वृत्त-रचना : *एक दिए हुए बिन्दु को केन्द्र और दिए हुए रेखाखण्ड की लम्बाई को त्रिज्या मानकर एक और केवल एक वृत्त की रचना की जा सकती है* (आकृति 14.2)।



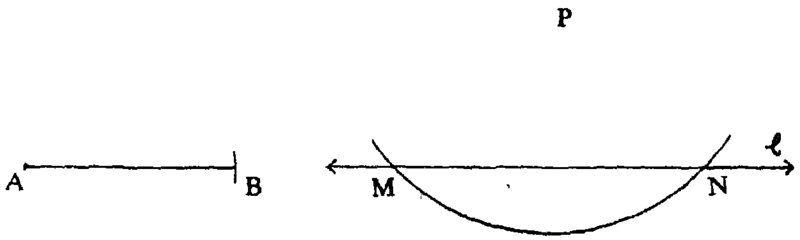
आकृति 14.2



आकृति 14.3

सर्वांगसम रेखाखण्ड रचना : *यदि एक किरण OX और एक रेखा खण्ड AB दिये हों, तो किरण PX पर एक ऐसे बिन्दु P की रचना की जा सकती है जिससे कि $OP = AB$* (आकृति 14.3)।

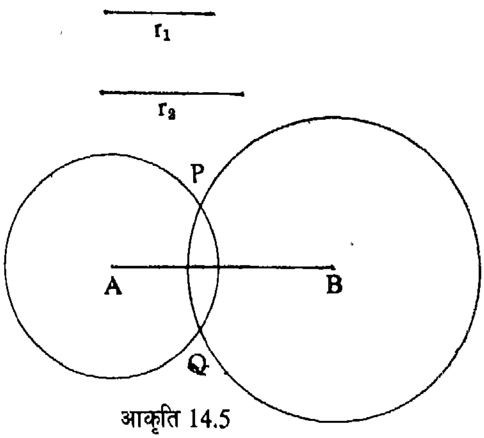
वृत्त-रेखा प्रतिच्छेदन रचना : *यदि रेखा l के बाहर एक बिन्दु P और एक रेखा खण्ड AB दिये हों और यदि l से P की दूरी AB से कम हो, तो रेखा l पर ऐसे दो बिन्दुओं M और N की रचना की जा सकती है, जिससे कि $PM = PN = AB$* (आकृति 14.4)।



आकृति 14.4

द्विवृत्त प्रतिच्छेद रचना : यदि दो बिन्दु A और B और लम्बाइयों r_1 और r_2 के दो रेखा खण्ड दिए हुए हों और $AB < r_1 + r_2$ हो, तो AB के दोनों ओर ऐसे दो बिन्दुओं P और Q की रचना की जा सकती है

कि $PA = QA = r_1$, और $PB = QB = r_2$ (आकृति 14.5)।



आकृति 14.5

14.3 रचना निर्मेय के भाग

प्रत्येक रचना के लिए आकृतियों के गुणधर्मों के साथ साथ आपकी तर्क शक्ति तथा रूलर और परकार के प्रयोग करने में आपकी निपुणता की आवश्यकता होती है। रचना निर्मेय को निम्नलिखित भागों में बांटा जा सकता है।

(1) पुनर्कथन : निर्मेय का दुबारा कथन दिया जाए, जिससे कि स्पष्ट हो जाए कि क्या
(क) दिया है। (ख) अभीष्ट है।

(2) विश्लेषण (Analysis) : मान लीजिए कि आकृति, जैसी अभीष्ट है, बन गई है। फिर विचार कीजिए कि कैसे दी हुई आकृति से आरम्भ कर केवल आधारभूत रचनाओं का और पूर्व-रचित रचनाओं का प्रयोग करते हुए अभीष्ट आकृति प्राप्त की जा सकती हैं।

(3) पूर्ण की गई आकृति

(4) रचना के चरण : रचना पूर्ण करने में जो चरण आपने वास्तव में लिए हैं उन्हें उसी क्रम में लिखिए।

(5) उपपत्ति : यह भी किसी भी प्रमेय की उपपत्ति के समान होती है। आपको यह दिखाना होता है कि बनाई गई आकृति (कोण व अन्य आकृतियों) के वे ही गुण हैं जो अभीष्ट थे।

> **टिप्पणी** : चरण (2) के संबंध में कोई एकरूपता नहीं है, क्योंकि यह चरण व्यक्ति-व्यक्ति पर निर्भर करता है। अतः इस भाग का वर्णन हल में नहीं किया जाता।

उपपत्ति, रचना निर्मेय का एक आवश्यक भाग है। परन्तु यदि उपपत्ति देना आवश्यक न हो तो इस भाग को छोड़ा जा सकता है। सभी निर्मेयों के हल में शेष तीन भागों का होना आवश्यक है।

14.4 प्रारम्भिक रचनाएं

रचना 1 : *रेखा खण्ड का लम्ब-समद्विभाजक खींचना*

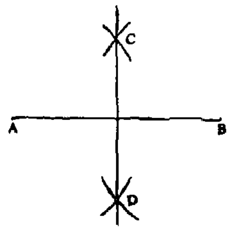
दिया है : रेखा खण्ड AB (आकृति 14.6)।

अभीष्ट : AB का लम्ब-समद्विभाजक खींचना।

रचना के चरण :

1. A को केन्द्र मान कर AB के आधे से अधिक त्रिज्या ले कर, AB के दोनों ओर एक एक चाप खींचिए।
2. B को केन्द्र मान कर उसी त्रिज्या को लेकर (जैसे चरण 1 में), AB के दोनों ओर दो चाप लगाइए, जो चरण 1 के चापों को C और D पर प्रतिच्छेद करे।
3. रेखा CD की रचना कीजिए।

   रेखा CD ही AB का अभीष्ट लम्ब-समद्विभाजक है (आकृति 14.6)।



आकृति 14.6

उपपत्ति : $AC = BC$ और $AD = BD$ (रचना)

$\therefore$ C और D, AB के लम्ब-समद्विभाजक पर हैं।

अतः CD रेखा खण्ड AB का लम्ब-समद्विभाजक है।

प्रश्नावली 14.1

1. 4.8 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड खींचिए और उसे समद्विभाजित कीजिए। प्रत्येक भाग को मापिए।
2. रूलर और परकार से दिए हुए रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।
3. दो दिये हुए बिन्दुओं A और B से होकर जाते हुए और दी हुई त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए।

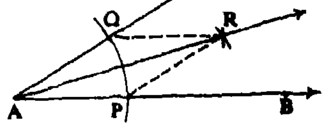
रचना 2 : *दिए हुए कोण का समद्विभाजक खींचना*

दिया है : $\angle BAC$ (आकृति 14.7)।

अभीष्ट : $\angle BAC$ का समद्विभाजक खींचना

रचना के चरण :

1. A को केन्द्र मान कर और कोई त्रिज्या लेकर, एक चाप खींचिए जो AB और AC को क्रमशः बिन्दु P और Q पर प्रतिच्छेद करे।



आकृति 14.7

2. बिन्दु P और Q को केन्द्र मान कर, और $\frac{1}{2}$ PQ से अधिक त्रिज्या लेकर दो चाप खींचिए जो परस्पर बिन्दु R पर प्रतिच्छेद करें।
3. किरण AR की रचना कीजिए।
   किरण AR, $\angle BAC$ का अभीष्ट समद्विभाजक है।

उपपत्ति : $\Delta\ ARP$ और $\Delta\ ARQ$ में,

$AR = AR$ (उभनिष्ठ)

$AP = AQ$ (रचना)

और $PR = QR$ (रचना)

$\therefore\ \Delta\ ARP \cong \Delta\ ARQ$ (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसम प्रमेय)

अतः $\angle BAR = \angle RAC$

या किरण AR, $\angle BAC$ का समद्विभाजन करता है।

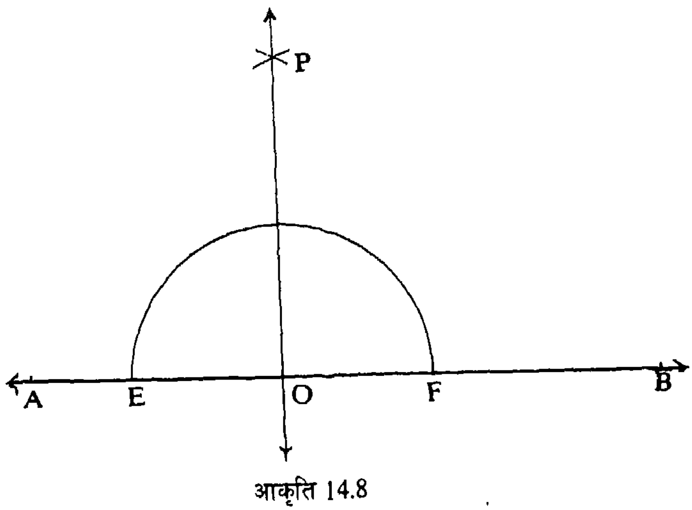
प्रश्नावली 14.2

1. प्रोट्रैक्टर से 110° का एक कोण बनाइए। अब केवल रूलर और परकार की सहायता से इसे समद्विभाजित कीजिए।

रचना 3 : *दी हुई रेखा के एक बिन्दु पर लम्ब खींचना*

दिया है : रेखा AB पर एक बिन्दु O है (आकृति 14.8)।

अभीष्ट : O से एक रेखा खींचना जो AB पर लम्ब हो



आकृति 14.8

रचना के चरण :

1. O को केन्द्र मान कर और कोई त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो रेखा AB का E और F पर प्रतिच्छेद करे।
2. E और F को केन्द मान कर और समान त्रिज्या लेकर AB के एक ओर दो चाप लगाइए जो परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करें।
3. PO को मिलाकर बढ़ा दीजिए जिससे कि रेखा PO प्राप्त हो जाए। रेखा PO, AB के बिन्दु O पर लम्ब है (आकृति 14.8)।

उपपत्ति : O, रेखाखण्ड EF का मध्य बिन्दु है। (रचना)

और $EP = PF$ (रचना)

$\therefore$ P और O, EF के लम्ब-समद्विभाजक पर हैं।

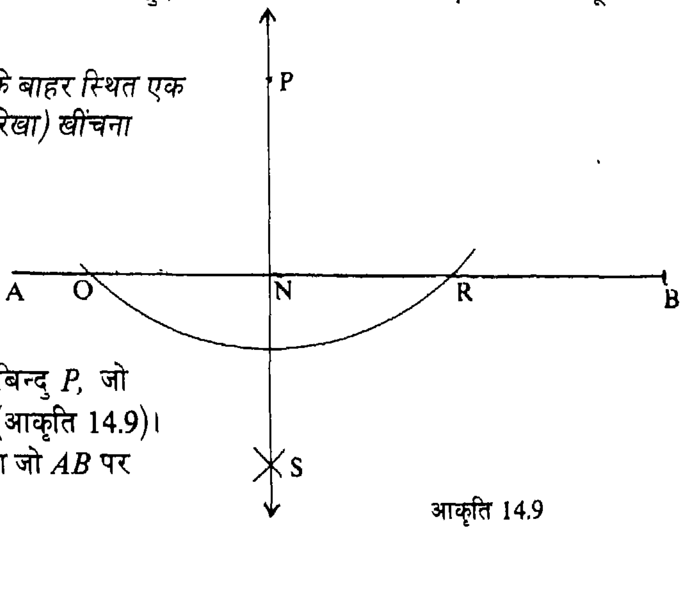
अतः PO, EF का लम्ब-समद्विभाजक है।

$\therefore$ $PO \perp AB$

प्रश्नावली 14.3

1. 5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड AB बनाइए। इस पर एक बिन्दु ऐसा लीजिए कि $AC = 2$ सेमी। C से होती हुई एक रेखा खींचिए जो AB पर लम्ब हो।
2. 4 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड AB बनाइए। उसके प्रत्येकं सिरे पर रेखा खींचिए जो AB पर लम्ब हो। क्या ये दोनों रेखाएं समांतर हैं?
3. आयत के गुणधर्मों का प्रयोग करके दी हुई रेखा के समांतर रेखा खींचिए जो उससे h दूरी पर हो।

रचना 4 : *दी हुई रेखा पर, उसके बाहर स्थित एक दिये बिन्दु से लम्ब (रेखा) खींचना*



आकृति 14.9

दिया है : रेखा AB और एक बिन्दु P, जो रेखा AB पर नहीं है (आकृति 14.9)।

अभीष्ट : P से एक रेखा खींचना जो AB पर लम्ब हो

रचना के चरण :

1. P को केन्द्र मान कर और सुविधाजनक लम्बाई की कोई त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो AB का दो बिन्दुओं Q और R पर प्रतिच्छेद करे।
2. क्रमशः Q और R को केन्द्र मान कर और QR के आधे से अधिक की त्रिज्या लेकर रेखा AB के एक ओर P के विपरीत दो चाप लगाइए जो परस्पर बिन्दु S पर प्रतिच्छेद करें।
3. PS को मिलाइए और बढ़ा कर रेखा PS के रूप में इसे प्रकट कीजिए और मान लीजिए PS, AB को बिन्दु N पर प्रतिच्छेद करती है।

रेखा PS, AB पर अभीष्ट लम्ब है।

उपपत्ति : $PQ = PR$ (रचना)

$RS = QS$ (रचना)

$\therefore$ P और S, रेखाखण्ड QR के लम्ब-समद्विभाजक पर हैं,

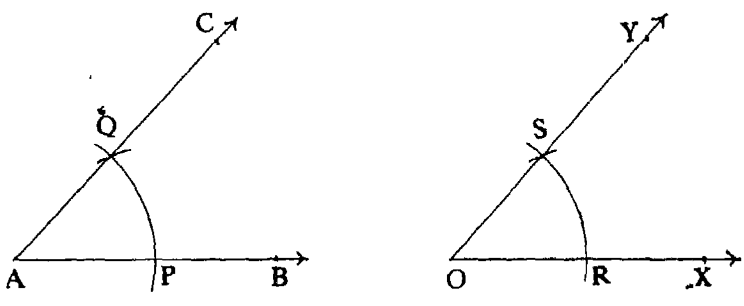
$\therefore$ PS, QR का लम्ब समद्विभाजक है।

अतः $PN \perp AB$

प्रश्नावली 14.4

1. एक त्रिभुज ABC बनाइए। $AD \perp BC$ की रचना कीजिए।

रचना 5 : *दिए हुए कोण के बराबर कोण बनाना*



आकृति 14.10

दिया है : $\angle BAC$ और किरण OX (आकृति 14.10)।

अभीष्ट : किरण OY की रचना करना जिससे कि. $\angle XOY = \angle BAC$

रचना के चरण :

1. A को केन्द्र मान कर और कोई त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो AB और AC का क्रमश: P और Q पर प्रतिच्छेद करे।
2. O को केन्द्र मान कर और उसी त्रिज्या की (जैसा कि चरण 1 में) एक चाप लगाइए जो किरण OX का R पर प्रतिच्छेद करे।
3. R को केन्द्र मान कर और त्रिज्या PQ लेकर एक चाप लगाइए जो चरण 2 के चाप का S पर प्रतिच्छेद करे।
4. किरण OS खींचिए और इसे OY कहिए।
   OY अभीष्ट किरण है जिससे कि $\angle XOY = \angle BAC$

उपपत्ति : $\Delta\, APQ$ और $\Delta\, ORS$ में,

$AP = OR, \quad AQ = OS, \quad PQ = RS$ (रचना)

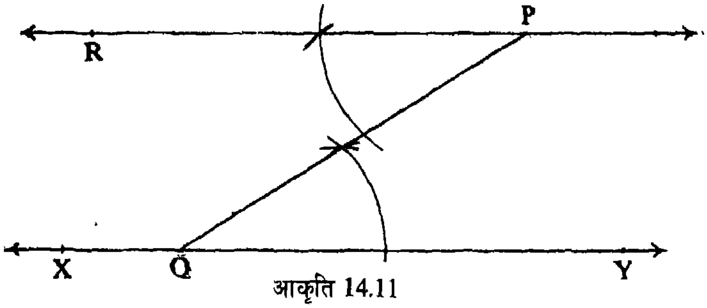
$\therefore\ \Delta\, APQ \cong \Delta\, ORS$ (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसम प्रमेय)

अत: $\angle XOY = \angle BAC$

प्रश्नावली 14.5

1. प्रोट्रैक्टर से 80° का एक कोण बनाइए। अब रूलर और परकार की सहायता से निम्नलिखित माप के कोण बनाइए :
   (i) 80° (ii) 160° (iii) 40° (iv) 120°

रचना 6 : *रेखा के बाहर स्थित किसी बिन्दु से होती हुई रेखा के समांतर रेखा खींचना*



आकृति 14.11

दिया है : एक रेखा XY और एक बिन्दु P, जो रेखा XY पर नहीं है (आकृति 14.11)।

अभीष्ट : P से XY के समांतर रेखा खींचना

रचना के चरण :

1. XY पर कोई बिन्दु Q लीजिए।
2. PQ को मिलाइए।
3. एक किरण PR ऐसा खींचिए कि R, रेखा PQ के उस ओर हो जो Y से विपरीत दिशा में है और $\angle QPR = \angle PQY$
4. किरण PR को बढ़ा कर रेखा PR के रूप में प्रकट कीजिए।

   रेखा PR अभीष्ट रेखा है जो XY के समांतर है (आकृति 14.11)।

उपपत्ति : तिर्यक रेखा PQ, दो रेखाओं XY और PR का प्रतिच्छेद करती है और इस प्रकार एकांतर अन्तः कोण $\angle YQP$ और $\angle QPR$ बनाती है जो बराबर हैं।

$\therefore PR \parallel XY$

प्रश्नावली 14.6

1. एक त्रिभुज बनाइए। प्रत्येक शीर्ष से होती हुई सम्मुख भुजा के समांतर रेखा खींचिए।

रचना 7 : *60° का कोण बनाना।*

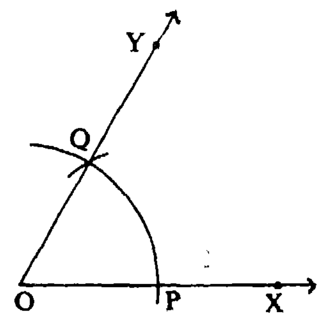
दिया है : किरण OX (आकृति 14.12)।

अभीष्ट : ऐसी किरण OY खींचना जिससे कि $\angle XOY = 60°$

रचना के चरण :

1. O को केन्द्र मान कर और कोई त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो OX का बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करे।
2. P को केन्द्र मान कर और उसी त्रिज्या को (जो कि चरण 1 में है) लेकर एक चाप खींचिए जो पहले चाप का बिन्दु Q पर प्रतिच्छेद करे।
3. OQ को मिलाइए और बढ़ा कर किरण OY की रचना कीजिए।

   $\angle XOY$ अभीष्ट कोण है जिसका माप 60° है।



आकृति 14.12

उपपत्ति : $\Delta\ OPQ$ में,

$OP = QO = PQ$

$\therefore\ \Delta\ OPQ$, समबाहु त्रिभुज है

अत: $\angle XOY = \angle POQ = 60°$

(रचना)

प्रश्नावली 14.7

1. निम्नलिखित माप के कोण बनाइए :

   (i) 60° (ii) 30° (iii) 120° (iv) 15°

2. रेखाखण्ड AB के सिरे A पर 90° का कोण बनाइए। रचना की व्याख्या कीजिए।

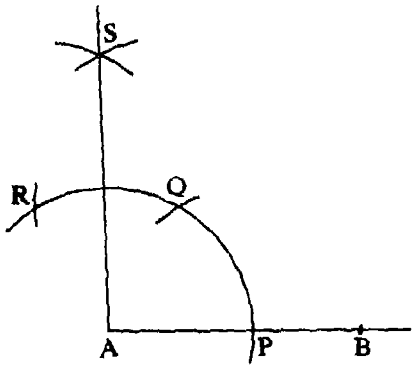
   [**संकेत :** इस प्रकार की रचना कीजिए जैसा कि आकृति 14.13 में दिखाया गया है जिसमें $AP = PQ = QR$ और $RS = QS$]

3. निम्नलिखित माप के कोण बनाइए :

   (i) 45° (ii) $22\frac{1}{2}°$

   (iii) 105° (iv) 75°

   (v) 135°

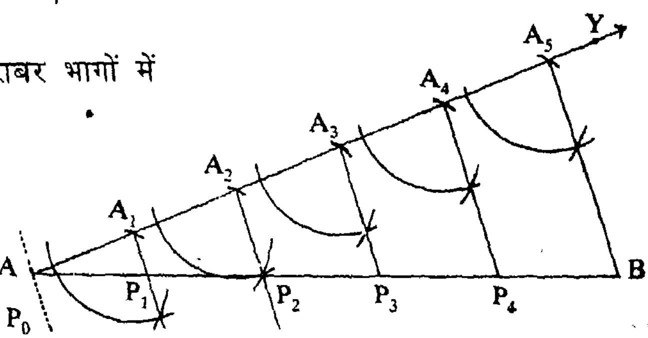


आकृति 14.13

रचना 8 : *दिए हुए रेखाखण्ड को बराबर भागों में विभाजित करना :*

दिया है : एक रेखाखण्ड AB और एक धन पूर्णांक n, मान लीजिए $n = 5$ (आकृति 14.14)।

अभीष्ट : AB को पांच बराबर भागों में बांटना



आकृति 14.14

रचना के चरण :

1. किरण AY खींचिए जिससे कि कोण BAY बन जाए।
2. किरण AY पर, A से प्रारम्भ कर के ऐसे बिन्दु A_1, A_2, A_3, A_4 और A_5 लीजिए जिससे कि $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$
3. A_5B को मिलाइए।
4. बिन्दुओं A_4, A_3, A_2, A_1 से A_5B के समांतर रेखाएं खींचिए जो AB का क्रमशः P_4, P_3, P_2 और P_1 पर प्रतिच्छेद करती हों।
   तब बिन्दु P_1, P_2, P_3 और P_4 अभीष्ट बिन्दु हैं जो AB को पांच बराबर भागों AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 और P_4B में विभाजित करते हैं (आकृति 14.14)।

उपपत्ति : मान लीजिए A से खींची गई रेखा AP_0 रेखा A_1P_1 के समांतर है।
अब $AP_0, A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4, A_5B$ छः समांतर रेखाएं हैं; और ये रेखाएं AY पर बराबर अन्तः खण्ड AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 बनाती हैं।
अतः वे AB पर भी बराबर अन्तः खण्ड बनाती हैं।
इस प्रकार $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B$

प्रश्नावली 14.8

1. 4 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड AB खींचिए। रूलर और परकार की सहायता से इसे तीन बराबर भागों में बांटिए।
2. 5 सेमी लम्बाई का एक रेखा खण्ड AB लीजिए। रूलर और परकार की सहायता से इसे 1 : 2 के अनुपात में बांटिए और लम्बे भाग को मापिए।
2. 7 सेमी लम्बाई का एक रेखा खण्ड AB लीजिए। रूलर और परकार की सहायता से AB को 1 : 2 : 3 के अनुपात में तीन भागों में बांटिए।

14.5 त्रिभुज की रचना : साधारण स्थितियाँ

रचना 9 : *त्रिभुज बनाना जब उसकी तीनों भुजाएं दी हुई हों।*

उदाहरण : त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें $AB = 4$ सेमी, $BC = 5$ सेमी $CA = 3.5$ सेमी

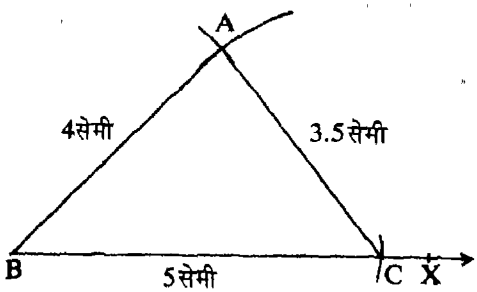
दिया है : $\Delta\ ABC$ में,
$AB = 4$ सेमी, $BC = 5$ सेमी $CA = 3.5$ सेमी

अभीष्ट : $\Delta\ ABC$ की रचना करना

रचना के चरण :

1. रेखाखण्ड $BC = 5$ सेमी खींचिए।
2. B को केन्द्र मान कर, 4 सेमी $(= AB)$, त्रिज्या लेकर, BC के एक ओर एक चाप लगाइए।
3. C को केन्द्र मान कर, 3.5 सेमी $(= AC)$ त्रिज्या लेकर, एक अन्य चाप लगाइए जो चरण 2 के चाप का A पर प्रतिच्छेद करता हो।
4. AB और AC को मिलाइए।

   $\Delta\ ABC$ ही अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 14.15

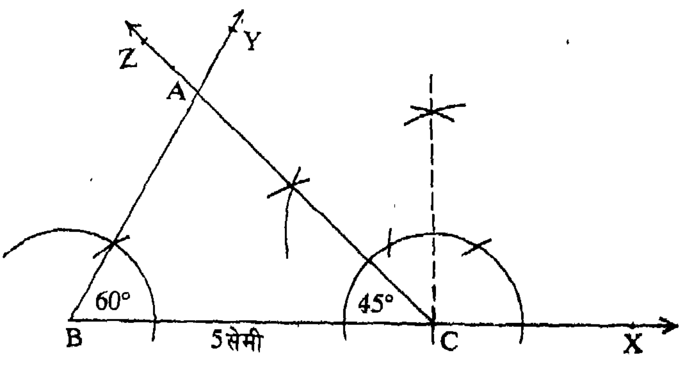
उपपत्ति : इसकी उपपत्ति भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसम प्रमेय का प्रयोग करके दी जा सकती है।

रचना 10 : *त्रिभुज बनाना जब उसके दो कोण और उनकी अन्तरित भुजा दी हो।*

उदाहरण : त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें $BC = 5$ सेमी, $\angle B = 60°$ और $\angle C = 45°$ हो।

दिया है : $\Delta\ ABC$ में,
$BC = 5$ सेमी, $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$

अभीष्ट : $\Delta\ ABC$ की रचना करना



आकृति 14.16

रचना के चरण :

1. रेखाखण्ड $BC = 5$ सेमी लीजिए। (आकृति 14.16)।
2. B पर किरण BY खींचिए, जिससे कि $\angle XBY = 60°$
3. C पर, किरण CZ खींचिए जिससे कि $\angle BCZ = 45°$, और किरण CZ, किरण BY का A पर प्रतिच्छेद करे।
4. ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।

उपपत्ति : इसकी उपपत्ति कोण-भुजा-कोण सर्वांगसम प्रमेय का प्रयोग करके दी जा सकती है।

रचना 11 : *त्रिभुज बनाना जब उसकी दो भुजाएं और उनका अन्तरित कोण दिये हों।*

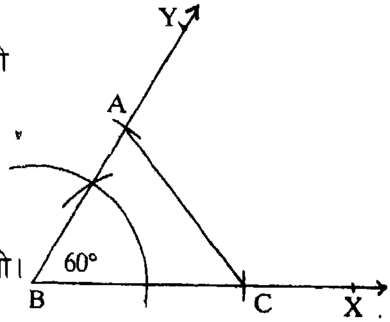
उदाहरण : त्रिभुज ABC बनाइए जब कि $AB = 2.5$ सेमी, $BC = 3$ सेमी और $\angle B = 60°$

दिया है : ΔABC में,
$BC = 3$ सेमी, $\angle B = 60°$, $AB = 2.5$ सेमी

अभीष्ट : Δ ABC की रचना करना

रचना के चरण :

1. रेखाखण्ड $BC = 3$ सेमी खींचिए।
2. किरण BY खींचिए जिससे कि $\angle CBY = 60°$।
   BY पर बिन्दु A लीजिए जिससे कि $BA = 2.5$ सेमी।
4. AC को मिलाइए।
   ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है (आकृति 14.17)।



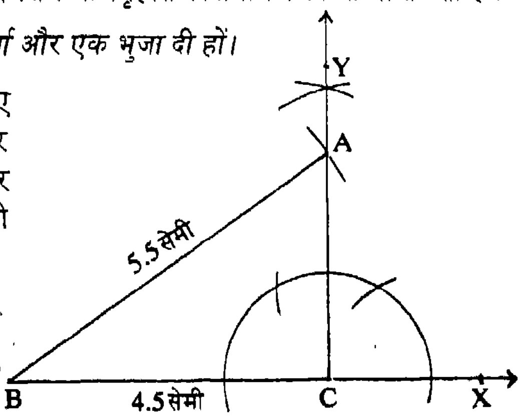
आकृति 14.17

उपपत्ति : *इसकी उपपत्ति भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसम अभिगृहीत का प्रयोग करके दी जा सकती है।*

रचना 12 : *समकोण त्रिभुज बनाना जिसका कर्ण और एक भुजा दी हों।*

उदाहरण : एक समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिसका कोण C समकोण हो और जिसका कर्ण $AB = 5.5$ सेमी और जिसकी एक भुजा $BC = 4.5$ सेमी हो।

दिया है : ΔABC में,
$\angle C = 90°$, $BC = 4.5$ सेमी,
$AB = 5.5$ सेमी



आकृति 14.18

अभीष्ट : त्रिभुज ABC की रचना करना

रचना के चरण :

1. रेखाखण्ड $BC = 4.5$ सेमी खींचिए।
2. C पर, किरण CY खींचिए, जिससे कि $\angle BCY = 90^\circ$
3. B को केन्द्र मान कर और त्रिज्या 5.5 सेमी ($= AB$) लेकर एक चाप खींचिए जो CY को A पर प्रतिच्छेद करती हो।
4. AB को मिलाइए।
   ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है (आकृति 14.18)।

उपपत्ति : इसकी उपपत्ति समकोण-कर्ण-भुजा सर्वांगसम प्रमेय का प्रयोग करके दी जा सकती है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि त्रिभुज की रचना के लिए, उसके तीन अवयवों की जानकारी होना आवश्यक है। (i) भुजा भुजा भुजा (ii) कोण भुजा कोण (iii) भुजा कोण भुजा। यदि केवल तीन कोण दिये हों, तो उनसे एक नहीं, अनेक त्रिभुज प्राप्त होंगे। स्थिति (iii) में, जो कोण दिया है, उसकी भुजाओं के अंतरित होना आवश्यक है। क्या स्थिति होगी, यदि दो भुजाएं और उन में से एक का सम्मुख कोण दिया हुआ हो? आप आसानी से जांच कर सकते हैं कि इस स्थिति में सम्भव त्रिभुजों की संख्या, दो, एक या शून्य हो सकती है। समकोण-कर्ण-भुजा त्रिभुज रचना, बीच की श्रेणी में आती है, अर्थात् एक त्रिभुज सम्भव है। यहां दिया गया कोण, एक समकोण है।

प्रश्नावली 14.9

1. ΔABC की रचना कीजिए, जबकि $BC = 5$ सेमी, $AB = 7.5$ सेमी और $\angle B = 45^\circ$ है। शेष दो कोणों को मापिए।
2. ΔABC की रचना कीजिए, जहां $BC = 5.2$ सेमी, $\angle B = 45^\circ$ और $\angle C = 60^\circ$। शीर्ष A से लम्ब खींचिए और इसे मापिए।
3. ΔPQR की रचना कीजिए जहां $PQ = 5$ सेमी, $QR = 6$ सेमी और $PR = 7.5$ सेमी। शीर्ष P से माध्यिका खींचिए और इसे मापिए।
4. एक समकोण त्रिभुज बनाइए, जिसमें कर्ण की लम्बाई 5.8 सेमी, और एक भुजा की लम्बाई 4.1 सेमी है। तीसरी भुजा मापिए।
5. समद्विबाहु त्रिभुज बनाइए जिसका आधार 3.6 सेमी और शीर्ष कोण 30° हो। [**संकेत** : प्रत्येक आधार कोण $= 75^\circ$]

6. एक त्रिभुज बनाइए जिसकी भुजाएं 3.6 सेमी, 3 सेमी और 4.8 सेमी हैं। सब से छोटे कोण का समद्विभाजक खींचिए।
7. ΔABC की रचना कीजिए जहां $BC = 7.5$ सेमी, $AC = 6$ सेमी और $\angle C = 105°$ हैं। $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक खींचिए और उनका प्रतिच्छेद बिन्दु O ज्ञात कीजिए। $\angle BOA$ मापिए।

14.6 त्रिभुज़ों की रचना : कुछ जटिल स्थितियां

रचना 13 : *त्रिभुज बनाना जिसका आधार 5 सेमी, अन्य दो भुजाओं का योग 7.5 सेमी और एक आधार कोण 60° हो।*

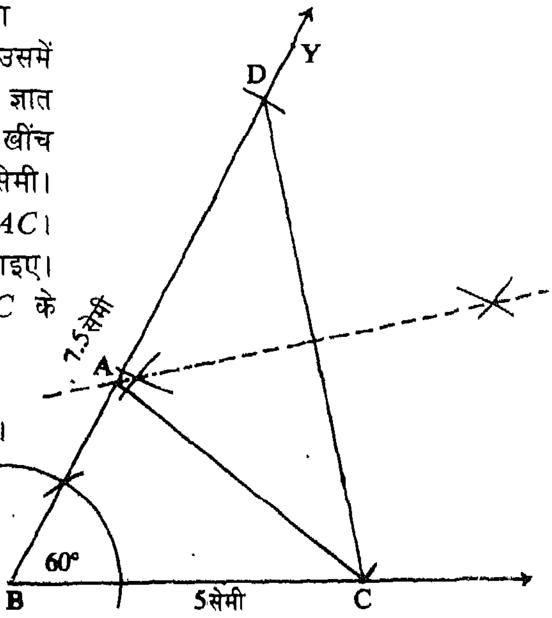
दिया है : ΔABC में, $AB + AC = 7.5$ सेमी, $BC = 5$ सेमी और $\angle ABC = 60°$

अभीष्ट : त्रिभुज ABC की रचना करना

[**विश्लेषण** : एक त्रिभुज ABC बनाइए। उसमें $\angle B = 60°$, $BC = 5$ सेमी लीजिए। इस से ज्ञात होता है कि भुजा BC और किरण BA तो तुरन्त खींच सकते हैं। हमें ज्ञात है कि $BA + AC = 7.5$ सेमी। BA को D तक ऐसा बढ़ाइए कि $AD = AC$। $BD = 7.5$ सेमी लीजिए और DC को मिलाइए। क्योंकि $AD = AC$, अतः बिन्दु A, DC के समद्विभाजक पर होगा।]

रचना के चरण :

1. रेखा खण्ड $BC = 5$ सेमी खींचिए।
2. किरण BY खींचिए जिससे कि $\angle CBY = 60°$
3. BY पर ऐसा बिन्दु D लीजिए जिससे कि $BD = 7.5$ सेमी, DC को मिलाइए।

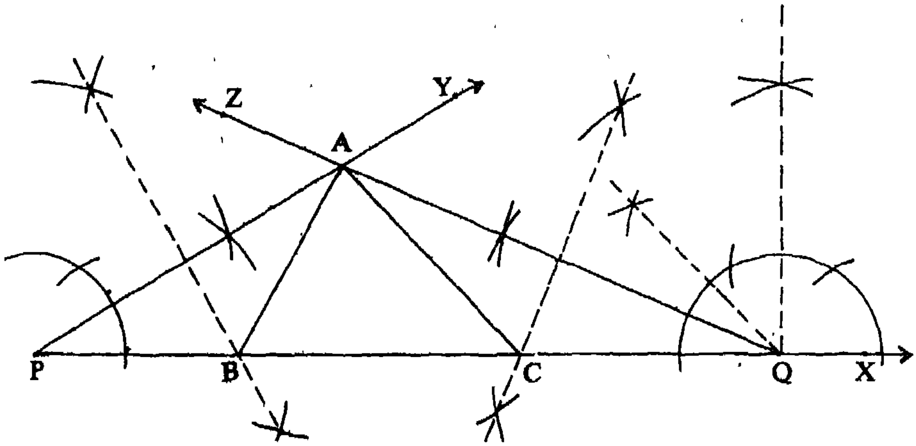


आकृति 14.19

4. DC का लम्ब-समद्विभाजक खींजिए, जो BD का बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करे।
5. AC को मिलाइए।

   ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.19)

रचना 14 : *त्रिभुज की रचना करना जिसका परिमाप 10.5 सेमी और आधार कोण 60° और 45° हों।*



आकृति 14.20

दिया है : $\Delta\ ABC$ में $\angle B = 60°, \angle C = 45°$ और $AB + BC + CD = 10.5$ सेमी।

अभीष्ट : त्रिभुज ABC की रचना करना

[**विश्लेषण :** मान लीजिए आपके द्वारा बनाया गया $\Delta\ ABC$ अभीष्ट त्रिभुज है। इसमें 10.5 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड कौन-सा है? BC को दोनों ओर बढ़ाइए और उस पर ऐसे बिन्दु P और Q लीजिए कि $PB = AB$ और $CQ = AC$। तब $PQ = 10.5$ सेमी। AP, AQ को मिलाइए। ध्यान दीजिए कि C, AQ के लम्ब समद्विभाजक पर होगा और B, AB के लंब समद्विभाजक पर। इसलिए यदि हम $\Delta\ APQ$ की रचना कर सकें तो B, C की रचना करना कठिन नहीं। $\Delta\ APQ$ में $PQ = 10.5$ सेमी और क्या पता लगाना है? $\angle APB = \angle PAB = \frac{1}{2} \times 60°$]

रचना के चरण :

1. $PQ = 10.5$ सेमी खींजिए।
2. P से होते हुए किरण PY खींचिए जिससे कि $\angle YPQ = \frac{1}{2} \times 60°$
3. Q से होते हुए किरण QZ खींचिए जिससे कि $\angle ZQP = \frac{1}{2} \times 45°$; और जो PY का A पर प्रतिच्छेद करे।
4. AP और AQ के लम्ब-समद्विभाजक खींचिए जो PQ को क्रमशः बिन्दु B और C पर मिलें। ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.20)

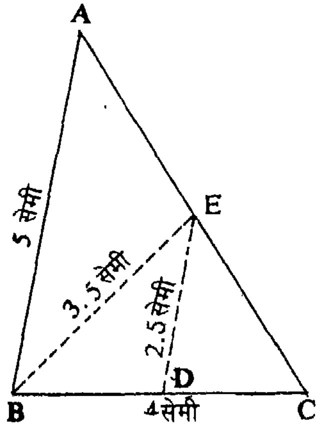
उपपत्ति : $AB = PB, AC = CQ$ (रचना)

$\therefore AB + BC + CA = PB + BC + CQ = 10.5$ सेमी

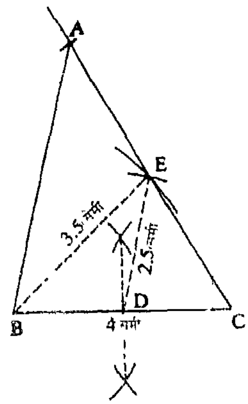
$\angle ABC = 2 \times \frac{1}{2} \times 60^\circ = 60^\circ$

इसी प्रकार, $\angle BCA = 45^\circ$

रचना 15 : *त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें BC = 4 सेमी, AB = 5 सेमी और माध्यिका BE = 3.5 सेमी हो।*



आकृति 14.21



आकृति 14.22

दिया है : ΔABC में $AB = 5$ सेमी, $BC = 4$ सेमी, माध्यिका $BC = 3.5$ सेमी

अभीष्ट : ΔABC की रचना करना

[**विश्लेषण :** AB, BC और माध्यिका BE की लम्बाई दी हुई है। आइए हम ऐसे त्रिभुज की खोज करें जिसकी तीनों भुजाएं निर्धारित की जा सकें। यदि D, BC का मध्य बिन्दु हो, तो ΔBDE ऐसा ही एक त्रिभुज है (आकृति 14.21), क्योंकि $DE = \frac{1}{2} AB$ हमें ज्ञात है। अतः E निर्धारित हो जाने पर A को आसानी से निर्धारित किया जा सकता है। इस तरह ΔABC निर्धारित हो जाता है।]

रचना के चरण :

1. $BC = 4$ सेमी खींचिए।
2. BC को बिन्दु D पर समद्विभाजित कीजिए।
3. B को केन्द्र मान कर और 3.5 सेमी की त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए।
4. D को केन्द्र मान कर और 2.5 सेमी $(= \frac{1}{2} AB)$ की त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप लगाइए

जो पहले चाप का बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करता हो।

5. CE को मिलाइए और इसे A तक बढ़ाइए जिससे कि $EA = CE$
6. AB को मिलाइए।

$\Delta\ ABC$ ही अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.22)

प्रश्नावली 14.10

1. एक समबाहु त्रिभुज बनाइए जबकि इसका एक शीर्ष-लम्ब 3.2 सेमी लम्बा हो।
2. एक समकोण त्रिभुज बनाइए, जबकि उसके कर्ण पर शीर्ष लम्ब 5 सेमी लम्बा हो और उसका एक न्यून कोण $30°$ का हो।
3. त्रिभुज ABC बनाइए, जबकि $AB = 4$ सेमी, $AC = 3$ सेमी, और भुजा BC पर शीर्ष लम्ब 2.5 सेमी लम्बा हो।
4. एक त्रिभुज बनाइए जबकि आधार के कोण $45°$ और $60°$ हों और आधार पर शीर्ष लम्ब 2 सेमी लम्बा हो।
5. त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें $BC = 4.5$ सेमी, $AB = 3$ सेमी, और शीर्ष लम्ब $AD = 2.5$ सेमी।
6. एक त्रिभुज बनाइए जिस का परिमाप 13.5 सेमी हो और तीनों भुजाओं में $2:3:4$ का अनुपात हो।
7. त्रिभुज ABC बनाइए जबकि $BC = 4$ सेमी, $\angle B = 75°$ और माध्यिका $AD = 3.2$ सेमी।

14.7 विशेष प्रकार के चतुर्भुजों की रचना :

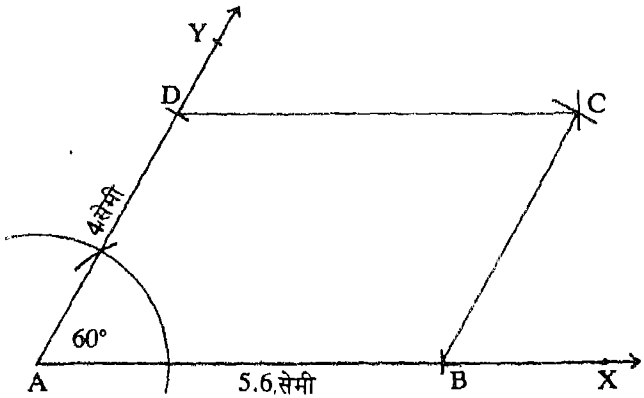
रचना 16 : *समांतरचतुर्भुज बनाना जब उसकी दो क्रमागत भुजाएं और उनके बीच का कोण दिये हों।*

उदाहरण : समांतरचतुर्भुज $ABCD$ बनाइए, जबकि $AB = 5.6$ सेमी, $AD = 4$ सेमी और $\angle A = 60°$।

दिया है : समांतरचतुर्भुज $ABCD$ में $AB = 5.6$ सेमी, $AD = 4$ सेमी और $\angle A = 60°$

अभीष्ट : समांतरचतुर्भुज $ABCD$ बनाना

[**विश्लेषण :** समांतरचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं। इस प्रकार हमें चतुर्भुज की चार भुजाएं और एक कोण ज्ञात हैं।]



आकृति 14.23

रचना के चरण :

1. रेखा खण्ड $AB = 5.6$ सेमी खींचिए।
2. किरण BY खींचिए जिससे कि $\angle BAY = 60°$।
3. किरण AY पर बिन्दु D लीजिए जिससे कि $AD = 4$ सेमी।
4. B को केन्द्र मान कर और AD के बराबर त्रिज्या लेकर AB के उस ओर एक चाप लगाइए जिस ओर D है।
5. D को केन्द्र मान कर और AB के बराबर त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप लगाइए जो चरण (4) के चाप का बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करे।
6. BC और DC को मिलाइए।
   $ABCD$ अभीष्ट समांतरचतुर्भुज है। (आकृति 14.23)

प्रश्नावली 14.11

1. एक समांतरचतुर्भुज बनाइए जिसकी दो क्रमागत भुजाएं 4.5 सेमी और 3.6 सेमी लम्बी हों और उनके बीच का कोण 75° का हो।
2. एक समांतरचतुर्भुज बनाइए जिसकी दो भुजाएं 4 सेमी और 2.5 सेमी लम्बी हों और उनके बीच का कोण 105° का हो।
   केवल रूलर और परकार की सहायता से उसकी 4 सेमी लम्बी भुजा पर एक शीर्ष से लम्ब डालिए।
3. एक आयत बनाइए जिसकी क्रमागत भुजाएं 5 सेमी और 3.5 सेमी लम्बी हों।

4. केवल रूलर और परकार का प्रयोग करके 2 सेमी भुजा का एक वर्ग बनाइए।
5. एक समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 3.4 सेमी लम्बी है और उसका एक कोण 45° का है। समचतुर्भुज की रचना कीजिए।

रचना 17 : *समांतरचतुर्भुज बनाना जब उसकी दो क्रमागत भुजाएं और एक विकर्ण दिये हों।*

उदाहरण : एक समांतरचतुर्भुज बनाइए जिसकी भुजाएं 3 सेमी और 2.6 सेमी लम्बी हों और जिसका एक विकर्ण 4 सेमी लंबा हो।

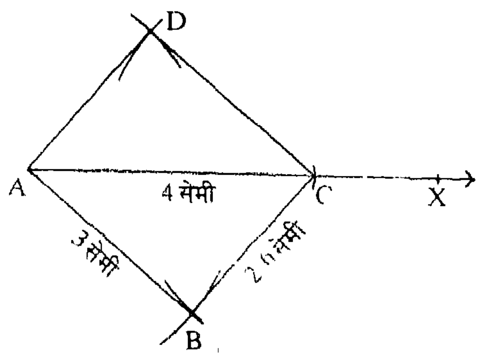
दिया है : समांतरचतुर्भुज $ABCD$ में
$AB = 3$ सेमी, $AD = 2.6$ सेमी और $AC = 4$ सेमी।

अभीष्ट : समांतरचतुर्भुज $ABCD$ की रचना करना।

[**विश्लेषण** : समांतरचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं। अत: हमें चार भुजाएं और एक विकर्ण ज्ञात हैं। AB, BC और AC से $\Delta\ ABC$ बनता है। $AB = 3$ सेमी, $BC = AD = 2.6$ सेमी और $AC = 4$ सेमी।]

रचना के चरण :

1. $AC = 4$ सेमी खींचिए।
2. A और C को केन्द्र मान कर और 3 सेमी की त्रिज्या लेकर AC के दोनों ओर एक चाप लगाइए।
3. C और A को केन्द्र मान कर और 2.6 सेमी की त्रिज्या लेकर, दो चाप लगाइए जो चरण 2 के चापों को बिन्दु B और D पर प्रतिच्छेद करते हों।
4. AB, BC, CD और DA को मिलाइए। $ABCD$ अभीष्ट समांतरचतुर्भुज है। (आकृति 14.24)



आकृति 14.24

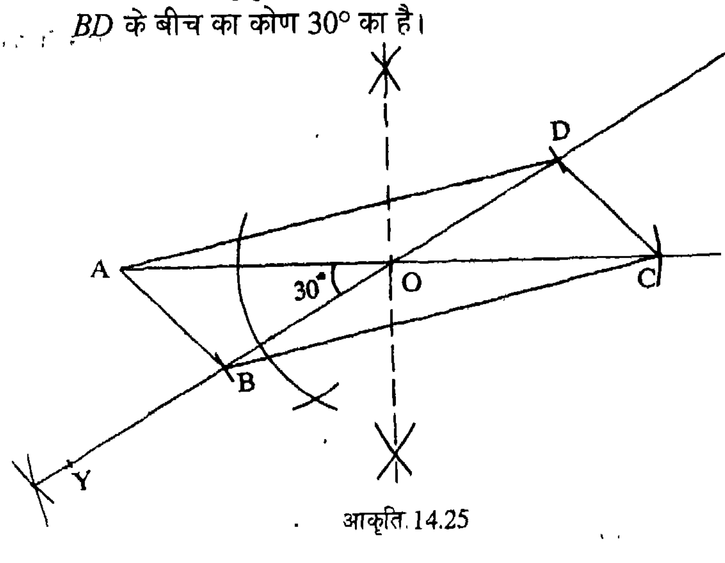
प्रश्नावली 14.12

1. समांतरचतुर्भुज *ABCD* बनाइए जिसमें AB = 3 सेमी, BC = 5 सेमी और AC = 4 सेमी।
   केवल रूलर और परकार की सहायता से दो क्रमागत कोणों के समद्विभाजक खींजिए।
2. एक समांतरचतुर्भुज बनाइए जिसकी दो भुजाएं 3.7 सेमी और 4 सेमी लम्बी हों और एक विकर्ण 6.1 सेमी लम्बा हो।
3. एक समचतुर्भुज बनाइए जिस की एक भुजा 6 सेमी लम्बी और एक विकर्ण 8 सेमी लम्बा हो। दूसरे विकर्ण की लम्बाई मापिए।
4. एक आयत बनाइए जिसकी एक भुजा 5 सेमी लम्बी और एक विकर्ण 6.8 सेमी लम्बा हो।
5. समचतुर्भुज *ABCD* बनाइए जिसमें $AB = BC = AC = 3$ सेमी हो।
6. एक आयत बनाइए जिसकी एक भुजा 3.5 सेमी लम्बी है और इस भुजा और विकर्ण के बीच का कोण 30° का हो।

रचना 18 : *एक समांतर चतुर्भुज बनाना जबकि उसके दो विकर्ण और उनके बीच का कोण दिया हुआ हो।*

उदाहरण : एक समांतरचतुर्भुज *ABCD* बनाना जबकि $AC = 7.2$ सेमी तथा $BD = 5.4$ सेमी और विकर्णों के बीच का कोण 30° का हो।

दिया है : एक समांतर चतुर्भुज *ABCD* में $AC = 7.2$ सेमी, $BD = 5.4$ सेमी तथा *AC* और *BD* के बीच का कोण 30° का है।



आकृति 14.25

अभीष्ट : समांतरचतुर्भुज बनाना

[**विश्लेषण :** समांतरचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। यदि AC और BD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हों तों $AO = OC$, $BO = OD$ और $\angle AOB = 30°$]

रचना के चरण :

1. $AC = 7.2$ सेमी खींजिए और इसे O पर समद्विभाजित कीजिए।
2. एक ऐसी किरण OY खींचिए जिससे कि $\angle AOY = 30°$
3. किरण OY को बढ़ाइए जिससे कि रेखा $Y'OY$ बने।
4. O को केन्द्र मानकर और 2.7 सेमी $(= \frac{1}{2} \times 5.4)$ की त्रिज्या लेकर चाप खींचिए जो रेखा $Y'OY$ का B और D पर प्रतिच्छेद करते हों।
5. AB, BC, CD और DA को मिलाइए।

$ABCD$ अभीष्ट समांतरचतुर्भुज है। (आकृति 14.25)

प्रश्नावली 14.13

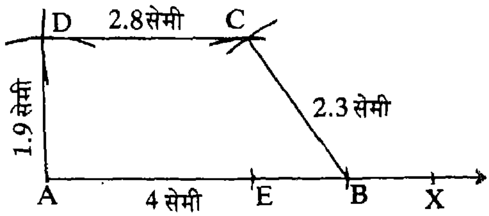
1. एक समांतरचतुर्भुज बनाइए जिसके विकर्ण 3.6 सेमी व 4.8 सेमी लम्बे हों और जिनके बीच का कोण 60° का हो।
2. एक आयत $ABCD$ बनाइए जिसमें $AC = 4.5$ सेमी और दो विकर्णों के बीच का कोण 30° का हो।
3. एक समचतुर्भुज बनाइए जिसके विकर्ण क्रमशः 4 सेमी और 6 सेमी लम्बे हों।
4. एक वर्ग बनाइए जिसका एक विकर्ण 5 सेमी लम्बा हो।

रचना 19 : *समलम्ब बनाना जबकि इसकी चारों भुजाएं दी हों और समांतर भुजाएं संकेतित हों।*

उदाहरण : समलम्ब $ABCD$ की रचना कीजिए जबकि $AB \parallel CD$, $AB = 4$ सेमी, $BC = 2.3$ सेमी, $CD = 2.8$ सेमी और $AD = 1.9$ सेमी।

दिया है : समलम्ब $ABCD$ में, $AB \parallel CD$, $AB = 4$ सेमी, $BC = 2.3$ सेमी, $CD = 2.8$ सेमी और $AD = 1.9$ सेमी।

अभीष्ट : समलम्ब $ABCD$ की रचना करना



आकृति 14.26

[**विश्लेषण :** यहाँ न तो कोई कोण दिया गया है और न ही ऐसी तीन भुजाएं जिनसे त्रिभुज बनती हैं। $A \quad CD$, परन्तु $AB = \quad CD$ इस से यह पता चलता है कि AB पर एक ऐसा बिन्दु E ले सकते हैं जिससे कि $AE = CD = 2.8$ सेमी। इस प्रकार $AECD$ एक $||^{gm}$ होगा और $CE = AD = 1.9$ सेमी। क्या आप $\quad CEB$ बना सकते हैं? हां बना सकते हैं और तब $||^{gm}$ $AECD$ सरलता से बनाया जा सकता है।]

रचना के चरण :

1. रेखाखण्ड $AB = 4$ सेमी खींचिए।
2. किरण AB पर बिन्दु E लीजिए जिससे कि $AE = 2.8$ सेमी।
3. E और B को केन्द्र मान कर और क्रमशः 1.9 सेमी और 2.3 सेमी की त्रिज्याएं ले कर दो चाप खींचिए जो परस्पर बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करते हों।
4. A को केन्द्र मान कर और 1.9 सेमी की त्रिज्या लेकर रेखा AB के C की ओर एक चाप लगाइए।
5. C को केन्द्र मान कर और 2.8 सेमी की त्रिज्या लेकर, एक चाप लगाइए जो चरण 4 के चाप का D पर प्रतिच्छेद करता हो।
6. BC, CD और DA को मिलाइए।

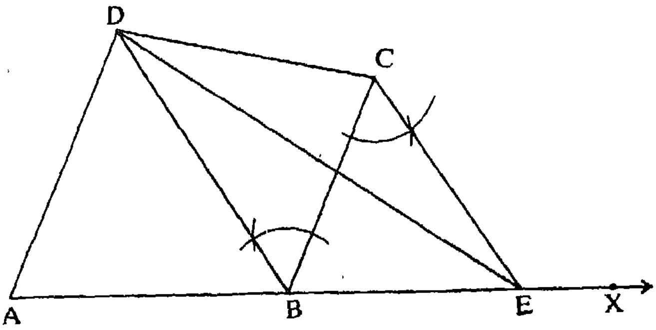
$ABCD$ ही अभीष्ट समलम्ब है। (आकृति 14.26)

प्रश्नावली 14.14

1. समलम्ब $ABCD$ बनाइए जिसमें $AB \parallel CD$, $AB = 5$ सेमी, $BC = 3$ सेमी, $AD = 3.3$ सेमी और समांतर भुजाओं के बीच दूरी 2.5 सेमी हो।
2. समलम्ब $ABCD$ बनाइए, जिसमें $AB \parallel CD$, $AB = 4.5$ सेमी, $BC = 2.2$ सेमी, $CD = 2.8$ सेमी और $AD = 1.9$ सेमी।
3. समलम्ब $ABCD$ बनाइए जिसमें $AB \parallel CD$, $AB = 5$ सेमी, $AD = 3$ सेमी, $BC = 2.8$ सेमी और $\angle A = 60°$।

14.8 तुल्य-क्षेत्रफल वाली आकृतियों की रचना

रचना 20 : *एक दिए हुए चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की रचना*



आकृति 14.27

दिया है : एक उत्तल चतुर्भुज $ABCD$

अभीष्ट : चतुर्भुज $ABCD$ के तुल्य-क्षेत्रफल वाला त्रिभुज बनाना।

[**विश्लेषण :** आपको याद होगा कि यदि दो त्रिभुज एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच हों तो उन का क्षेत्रफल बराबर होता है। इस से पता चलता है कि चतुर्भुज के क्षेत्र को दो त्रिभुजीय क्षेत्रों में बांट देना ठीक होगा। BD को मिलाइए। हम $\Delta\ BDC$ के स्थान पर ऐसा त्रिभुज लेना चाहेंगे जिसका आधार BD हो और क्षेत्रफल में $\Delta\ BDC$ के बराबर हो। C से होती हुई BD के समांतर एक रेखा खींचिए।]

रचना के चरण :

1. BD को मिलाइए।
2. C से होती हुई रेखा $CE \parallel BD$ खींजिए जो रेखा AB का बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करे।
3. DE को मिलाइए।

   $\Delta\ AED$ अभीष्ट त्रिभुज है (आकृति 14.27)।

उपपत्ति : क्षेत्रफल $(\Delta\ DBC)$ = क्षेत्रफल $(\Delta\ DBE)$ (क्यों?)

अब क्षेत्रफल $(\square\ ABCD)$ = क्षेत्रफल $(\Delta\ DAB)$ + क्षेत्रफल $(\Delta\ DBC)$

= क्षेत्रफल $(\Delta\ DAB)$ + क्षेत्रफल $(\Delta\ DBE)$

= क्षेत्रफल $(\Delta\ AED)$

टिप्पणी : 1. ध्यान दीजिए कि जो त्रिभुज हम ने ऊपर बनाया है केवल यही एक सम्भव त्रिभुज नहीं है। ऊपर की आकृति में हम ने भुजा AD को वैसे का वैसा रखा और AB को बढ़ाया। हम इसी प्रकार, किन्हीं दो अन्य क्रमागत भुजाओं को लेकर रचना कर सकते हैं और प्रत्येक स्थिति में एक अन्य त्रिभुज प्राप्त करेंगे जो क्षेत्रफल में दिये हुए चतुर्भुज के बराबर होगा।

2. ऊपर दी गई रचना एक व्यापक विधि का उदाहरण है। हमने $\square\ ABCD$ के स्थान पर ऐसे त्रिभुज की रचना की है जो क्षेत्रफल में इस के बराबर था, परन्तु जिसकी एक भुजा दिए हुए

चतुर्भुज की शेष भुजाओं में से एक भुजा के संरेखीय थी। इसी प्रकार से हम एक चतुर्भुज की रचना कर सकते हैं जो क्षेत्रफल में एक दिये हुए पञ्चभुज के बराबर हो; और व्यापक रूप मे, $(n - 1)$ भुजाओं वाले बहुभुज की रचंना की जा सकती है जो क्षेत्रफल में दिए हुए n भुजाओं वाले बहुभुज के बराबर हो। इस प्रक्रिया को जारी रखते हुए हम अंत में एक त्रिभुज प्राप्त कर सकते हैं जो क्षेत्रफल में एक दिए हुए बहुभुज के बराबर हो।

प्रश्नावली 14.15

1. आधार AB = 4 सेमी लेकर चतुर्भुज $ABCD$ बनाइए जिस में $AD = DC = 3$ सेमी, $BD = 4$ सेमी और $BC = 2$ सेमी। AB को बढ़ाकर उस पर एक त्रिभुज बनाइए, जो क्षेत्रफल में चतुर्भुज के बराबर हो।
2. चतुर्भुज $ABCD$ बनाइए, जिस में $AB = 5.2$ सेमी, $BC = 6.4$ सेमी, $CD = 7.2$ सेमी और $\angle B = \angle C = 90°$। AB को एक भुजा मान कर एक त्रिभुज बनाइए जो क्षेत्रफल में चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर हो।
3. एक चतुर्भुज $ABCD$ बनाइए जिसमें $AB = 5$ सेमी, $BC = 7.5$ सेमी और कोण A, B और D क्रमशः $125°$, $70°$ और $95°$ के हों। एक त्रिभुज बनाइए जिसकी एक भुजा BC हो और जो क्षेत्रफल में चतुर्भुज के क्षेत्रफल बराबर हो।
   त्रिभुज की शेष दो भुजाएं मापिए।

अध्याय 15

रैखिक सममिति

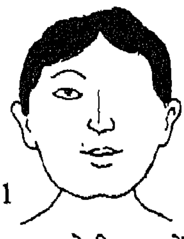
15.1 भूमिका

हमने कई ज्यामितीय संकल्पनाओं जैसे रेखाओं का समांतर होना, रेखाओं का संगामी होना, आकृतियों की सर्वांगसमता, इत्यादि का अध्ययन किया है। इन ज्यामितीय संकल्पनाओं के अध्ययन करने का एक प्रमुख कारण यह है कि हम इन संकल्पनाओं को अपने आस पास की प्रकृति में देखते हैं। इसलिए, यह आवश्यक है कि हम इन्हें समझें, ताकि जहाँ आवश्यकता पड़े हम इनका प्रयोग कर सकें।

'सममिति' (symmetry) एक अन्य महत्वपूर्ण ज्यामितीय संकल्पना है जो प्रकृति में बहुतायत में देखने को मिलती है और जिसका सर्वांगसमता के साथ निकट का सम्बन्ध है। हमारा अपना शरीर एक सममित पिण्ड है। इसी प्रकार बहुत से पौधे और पशु भी अपनी आकृति में सममिति प्रदर्शित करते हैं। यह भी पाया गया है कि क्रिस्टलों में अणुओं/परमाणुओं का विन्यास भी सममिति है। वास्तुविद् और अन्य डिज़ाइन अभियन्ता अपने कार्य में सममिति के गुणधर्मों का बहुत अधिक प्रयोग करते हैं।

सममिति कई प्रकार की होती है। इस अध्याय में हम जिस प्रकार की सममिति का अध्ययन करेंगे, उसे **रैखिक सममिति** (linear symmetry) कहते हैं।

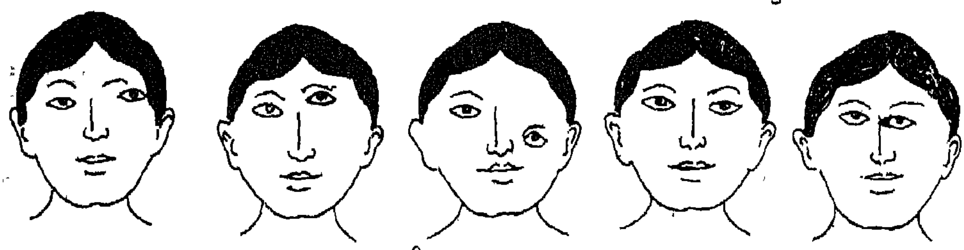
15.2 सममित आकृतियां



आकृति 15.1

आकृति 15.1 में, एक बालक के चेहरे पर केवल एक आंख दिखाई गई है। दूसरी आंख को अभी चित्रित करना है।

आकृति 15.2 में, कुछ विद्यार्थियों द्वारा पूरे किये गए चित्र दिखाये गए हैं। आप के विचार में किन-किन चित्रों में आंख ठीक प्रकार से चित्रित की गई है? अन्य चित्रों में क्या त्रुटि है?



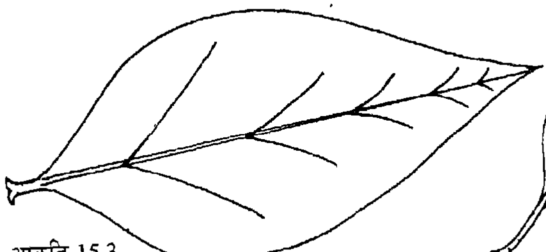
(क) (ख) आकृति 15.2 (ग) (घ) (ङ)

हम सब जानते हैं कि आंखें, नाक के सापेक्ष सममित प्रकार से स्थापित होती हैं। इस वाक्य से कि, 'आंखें नाक के सापेक्ष, सममित प्रकार से स्थापित होती हैं' आप क्या समझते हैं ? सामान्य मनुष्य की भाषा में, हम कह सकते हैं कि आंखें नाक से बराबर दूरी पर हैं और दोनों आंखें एक ही स्तर पर हैं।

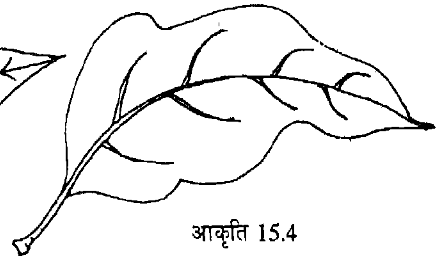
हम देखते हैं कि आकृति 15.2 (घ) में आंखे ठीक-ठीक चित्रित हैं। इस आकृति को फिर ध्यान से देखिए। मान लीजिए हम एक कागज़ के पन्ने को (जिस पर आकृति बनी है) नाक (रेखा) के साथ मोड़ कर तह (शिकन) कर लें तो चेहरे की आकृति इस तह (शिकन) से दो भागों में बंट जाएगी। यदि हम पन्ने को फिर शिकन के साथ मोड़ें तो इन दो भागों की क्या स्थिति होगी? ये दोनों भाग पूर्ण रूप से एक दूसरे को ढक लेंगे अर्थात् *संपाती होंगे*। दोनों आंखें भी संपाती होंगी। यदि अन्य चित्रों (क), (ख), (ग) और (ङ) को इसी प्रकार तह करें तो क्या आंखें परस्पर संपाती होंगी? नहीं। क्या आपके अनुसार चित्र (क), (ख), (ग), और (ङ) ठीक से चित्रित किये गए हैं? नहीं।

हम कहेंगे कि आकृति 15.2 (घ) में दिखाया गया चेहरा एक *सममित आकृति* है। यह किसी न किसी एक रेखा (यहां, नाक रेखा) के सापेक्ष सममित है। अतः चेहरा एक *रेखा के सापेक्ष सममित* है या हम कह सकते है कि चेहरे की *रैखिक सममिति* है।

अंतर्ज्ञान द्वारा (अनुभव के आधार पर) आपको 'सममिति' और 'सममित आकृतियों' के बारे में कुछ धारणाएं पहले से ही हैं। आकृति 15.3 में दिखाये गए पत्ते के बारे में आप क्या कहेंगे? क्या यह सममित है? ऐसा क्यों है? क्या इसकी व्याख्या आप कर सकते हैं? आकृति 15.4 में दिखाये गये पत्ते के बारे में क्या कहेंगे? क्या यह सममित है? ऐसा क्यों नहीं है? क्या इसकी व्याख्या आप कर सकते हैं?



आकृति 15.3



आकृति 15.4

आकृति 15.5 को देखिए। यदि पन्ने को AB के साथ साथ तह करें तो आकृति के (AB द्वारा बनाये गए) दोनों भाग परस्पर संपाती होंगे? अतः हम कह सकते हैं :

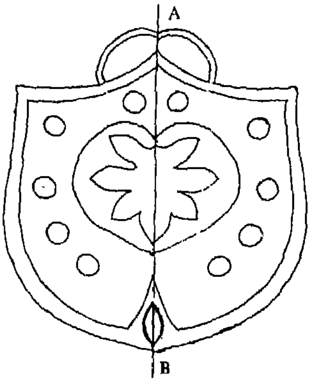
''आकृति 15.5 का चित्र *सममित* है और AB उसका *सममिति अक्ष* (axis of symmetry) है''।

कोई आकृति तब *सममित* आकृति होती है, जबकि आकृति के समतल में एक ऐसी रेखा l हो, कि आकृति को l के साथ साथ तह करने पर आकृति के दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाते हों। रेखा l को आकृति की *सममिति अक्ष* (axis of symmetry) कहते हैं।

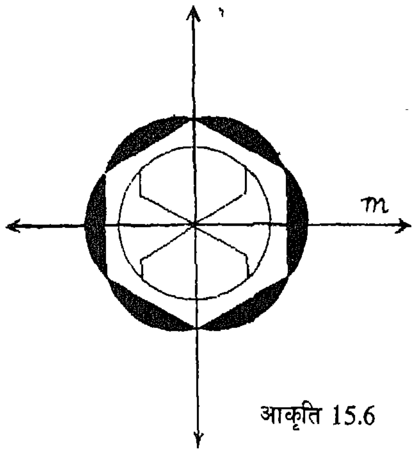
आकृति 15.6 को देखिए। यह एक सममित आकृति है। l और m रेखाएं दोनों ही इसके सममिति अक्ष हैं।

इस प्रकार, एक सममित आकृति के एक से अधिक सममिति अक्ष हो सकते हैं।

सममित आकृतियाँ बनाने की कुछ रोचक विधियाँ हैं। ऐसी दो विधियों का वर्णन हम यहाँ कर रहे हैं।



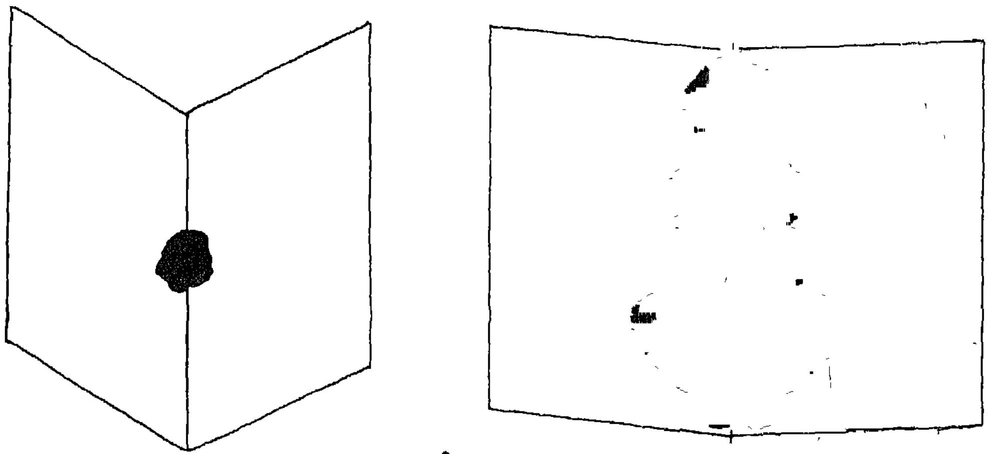
आकृति 15.5



आकृति 15.6

विधि I

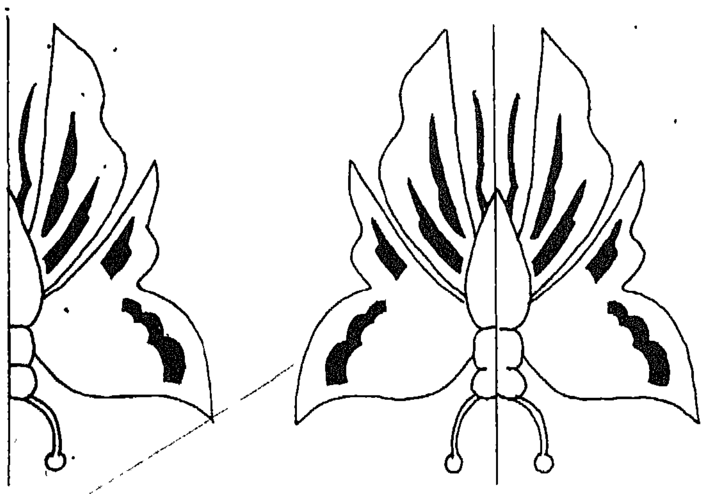
कागज का एक टुकड़ा लीजिए, उसे तह कीजिए और तह का निशान डाल दीजिए। कागज़ को खोलिए और उस निशान पर स्याही की एक बूंद डाल दीजिए और कागज़ को दुबारा तह कीजिए। इस स्थिति में; कागज को आहिस्ता से दबाइए ताकि स्याही चारों ओर फैल जाए। अब कागज़ को खोलिए। आप देखेंगे कि कागज़ पर जो विचित्र आकृति बनी है वह सममित आकृति है, तह का निशान इसका सममिति अक्ष है (आकृति 15.7)। इन आकृतियों को कभी-कभी 'स्याही के दानव' भी कहते हैं। (इन्हें हमें 'स्याही का देव' क्यों नहीं कहना चाहिए?)



आकृति 15.7

विधि II

काग़ज़ का एक टुकड़ा लीजिए, इसे तह कीजिए और तह का निशान डाल दीजिए। तह किये हुए काग़ज़ के नीचे एक कार्बन पेपर रखिए, जिसका कार्बन वाला भाग ऊपर की ओर हो। अब, अपनी पैंसिल लीजिए। तह के निशान पर के किसी बिन्दु से आरम्भ कर कोई चित्र बनाइए जो तह के निशान पर के एक बिन्दु पर आकर समाप्त करें। काग़ज़ को उठाइए और इसे खोल दीजिए। आप देखेंगे कि काग़ज़ पर एक सममित आकृति बनी है और तह का निशान इस आकृति का सममिति अक्ष है (आकृति 15.8)।

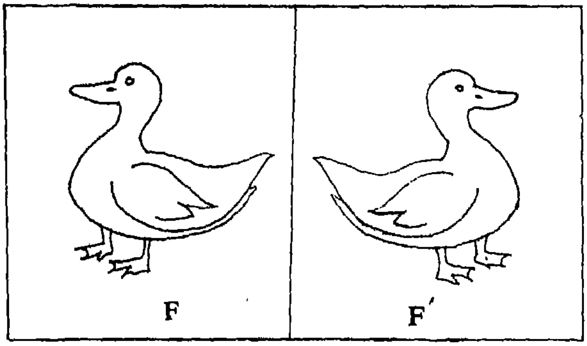


आकृति 15.8

अभी तक आपने एक ही आकृति लेकर, यह विचार किया है कि वह आकृति सममित है या नहीं? और यदि सममित है तो इसका सममिति अक्ष क्या है? इत्यादि। आइए चेहरे की आकृति की दोनों आंखों पर हम फिर से विचार करें। हम देखते हैं कि दोनों आंखें नाक के आपेक्ष सममित हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि नाक के सापेक्ष प्रत्येक आंख दूसरी आंख के सममित है। इससे हमें, किसी रेखा के सापेक्ष दो परस्पर सममित आकृतियां परिभाषित करने में सहायता मिलेगी।

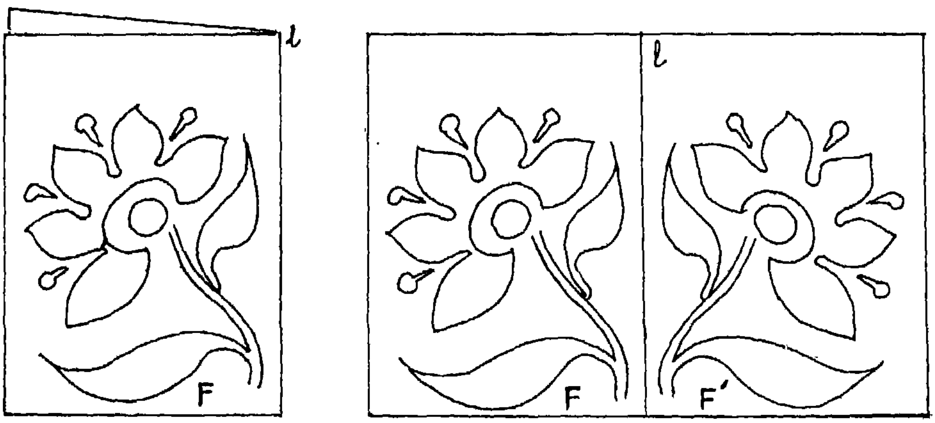
अंतर्ज्ञान से, हम कह सकते हैं कि काग़ज़ पर दो आकृतियां F और F', एक रेखा l के सापेक्ष, परस्पर सममित होती हैं यदि काग़ज़ को l के साथ साथ तह करने पर आकृतियां संपाती हो जाती हों। (आकृति 15.9)

यदि एक समतल में, एक आकृति F और एक रेखा l दी हुई हों, तो l के सापेक्ष, F के सममित, एक आकृति F' की रचना हम कर सकते हैं। एक विधि का वर्णन आगे दिया है।



आकृति 15.9

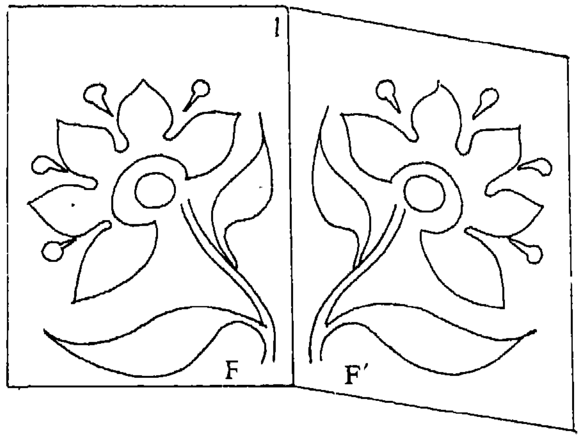
उस कागज़ को, जिस पर F और l हैं, l के साथ साथ तह कीजिए और तह का निशान डाल दीजिए। कागज़ को इस प्रकार रखिए कि आकृति F ऊपर की ओर हो। तह किये हुए कागज़ के नीचे एक कार्बन पेपर रखिए जिस का कार्बन वाला भाग ऊपरी ओर हो। कागज़ को दृढ़ता से थाम कर, पैंसिल द्वारा आकृति F को ट्रेस कीजिए। अब कागज़ को खोल कर दीजिए। कार्बन द्वारा बनी आकृति ही, अभीष्ट आकृति F' है। रेखा l के सापेक्ष, आकृति F', आकृति F के सममित है (आकृति 15.10)।



आकृति 15.10

कागज़ के टुकड़े को जिस पर F, F' और l बने हैं, मेज़ पर रखिए (आकृति 15.11)। एक समतल दर्पण को रेखा l के साथ रखिए, जिससे कि इस में आकृति F का प्रतिबिम्ब देखा जा सके। दर्पण में आकृति F के प्रतिबिम्ब देखिए और इसकी तुलना आकृति F' से कीजिए, जो आपने पहले बनाई थी। आप क्या देखते हैं?

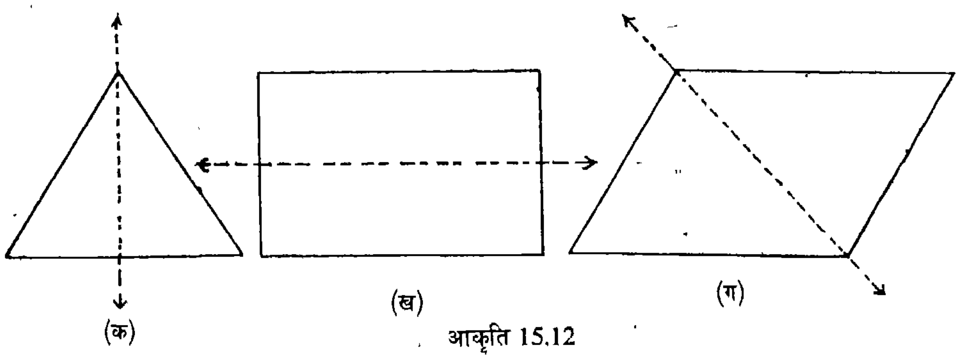
टिप्पणी : दी हुई आकृति के सममित आकृति को, कई बार, निर्दिष्ट आकृति का दर्पण प्रतिबिम्ब (mirror image) भी कहते हैं। इस प्रकार कोई आकृति और उस का दर्पण प्रतिबिम्ब, दर्पण के सापेक्ष, परस्पर सममित होते हैं।



आकृति 15.11

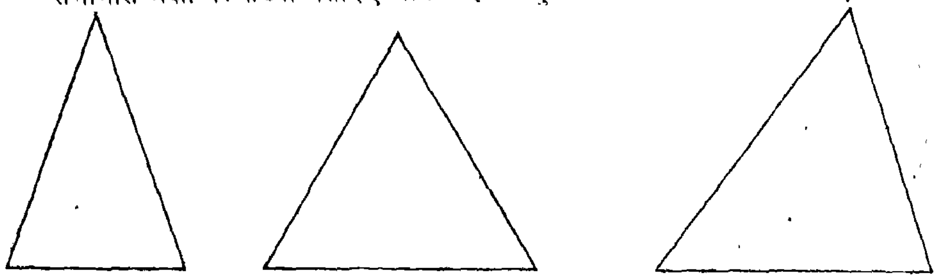
प्रश्नावली 15.1

1. नीचे की प्रत्येक आकृति में एक अतिरिक्त बिन्दुकित रेखा दिखाई गई है। ध्यान से देखिए, आकृति का नाम बताइए और बताइए कि आकृति, बिन्दुकित रेखा के सापेक्ष, सममित है कि नहीं।



आकृति 15.12

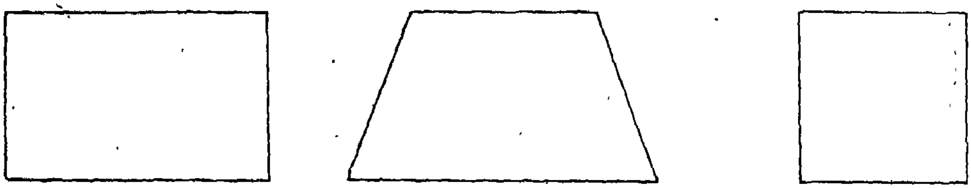
2. नीचे की आकृतियों में (क) एक समद्विबाहु त्रिभुज, (ख) एक समबाहु त्रिभुज और (ग) एक विषमबाहु त्रिभुज है।
प्रत्येक स्थिति में बताइए कि क्या त्रिभुज, सममित आकृति है? यदि त्रिभुज सममित है तो सममिति अक्षों की संख्या बताइए और उन्हें बिन्दुकित रेखाओं से प्रकट कीजिए।



(क) (ख) (ग)

आकृति 15.13

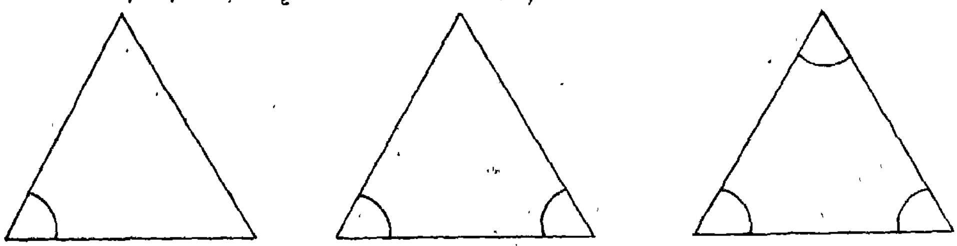
3. नीचे की प्रत्येक आकृति में, बताइए कि,
(i) क्या आकृति सममित है? और यदि हां तो (ii) सममिति अक्षों की संख्या कितनी है? और सममिति अक्षों को प्रकट भी कीजिए।



(क) (ख) (ग)

आकृति 15.14

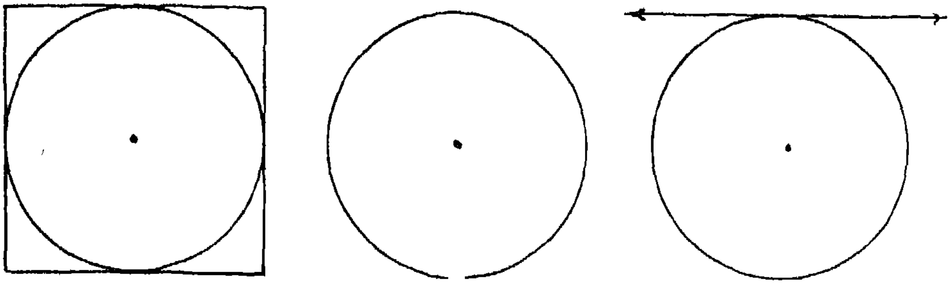
4. नीचे की प्रत्येक आकृति पर प्रश्न 3 को पुनः कीजिए। (ध्यान रखें कि शीर्षों के निकट दिखाए गए चाप, आकृति के अभिन्न भाग हैं।)



(क) (ख) (ग)

आकृति 15.15

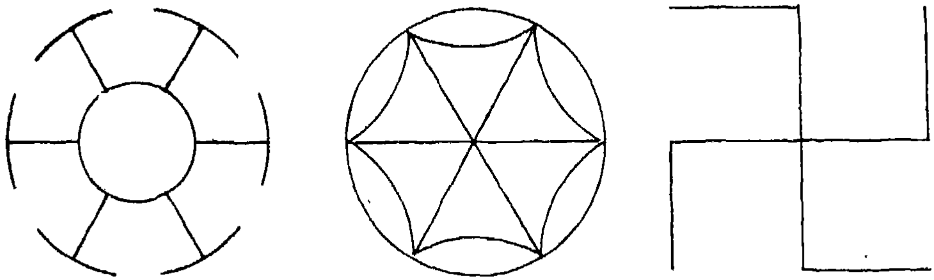
5. वृत्त का प्रत्येक व्यास उस वृत्त का एक सममिति अक्ष होता है। नीचे की प्रत्येक आकृति में या तो एक वृत्त है या वृत्त का कोई भाग। प्रत्येक स्थिति में, सममिति अक्षों की संख्या बताइए और उन्हें प्रकट कीजिए।



(क) (ख) (ग)

आकृति 15.16

6. नीचे की प्रत्येक आकृति में सममिति अक्षों की संख्या, यदि कोई हो, तो बताइए।



(क) (ख) (ग)

आकृति 15.17

7. मान लीजिए S' अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय है।

$S' = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$

प्रत्येक अक्षर को एक आकृति मान कर, नीचे दिये गए समुच्चयों को सारणीबद्ध रूप में लिखिए :

(i) $A' = \{x \in S' : x$ एक क्षैतिज अक्ष के प्रति सममिति है$\}$

(ii) $B' = \{x \in S' : x$ एक लम्बगत अक्ष के प्रति सममिति है$\}$

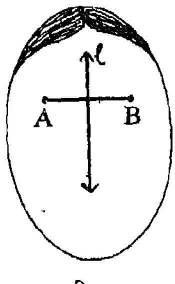
(iii) $C' = \{x \in S' : x$ सममित आकृति नहीं है$\}$

(iv) $D' = \{x \in S' : x$ के एक से अधिक सममिति अक्ष हैं$\}$

15.3 रैखिक सममिति

रैखिक सममिति के आधार-भूत विचारों को स्पष्ट करने के उद्देश्य से, हमने पिछले खण्ड में, उदाहरणों द्वारा इस संकल्पना का अनौपचारिक रूप से अध्ययन किया। नीचे, हम इस मौलिक संकल्पना का वर्णन ज्यामितीय शब्दों में करेंगे और फिर रैखिक सममित आकृतियों के कुछ गुणधर्मों का निगमन करेंगे।

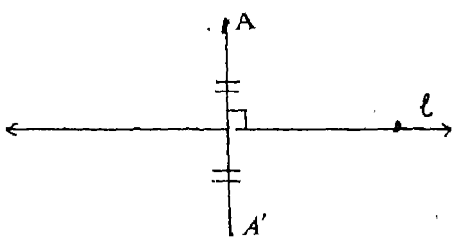
हमने देखा कि चेहरे की आकृति में दोनों आंखें नाक की रेखा के सापेक्ष, परस्पर सममित हैं। मान लीजिए, हम आंखों को दो बिन्दुओं A और B से प्रकट करें और नाक को एक रेखा खण्ड l से। बिन्दुओं A, B और रेखा l में परस्पर क्या सम्बन्ध देखते हैं? आप देखेंगे कि रेखा l, AB का लम्ब-समद्विभाजक है (आकृति 15.18)।



आकृति 15.18

परिभाषा : *दो बिन्दु A और A', एक रेखा l के सापेक्ष, सममित होते हैं यदि रेखा l रेखा खण्ड AA' को लम्ब-समद्विभाजित करे।*

उपरोक्त स्थिति में, हम कहते हैं कि दोनों बिन्दुओं A और A' में से प्रत्येक बिन्दु, रेखा l के सापेक्ष, दूसरे बिन्दु के *सममित* है; और रेखा l, उस आकृति का सममिति अक्ष है जिसमें ये दो बिन्दु हैं।



आकृति 15.19

> **टिप्पणी** : क्योंकि हमने सममिति को एक रेखा के सापेक्ष परिभाषित किया है, इसलिए हम इस प्रकार की सममिति को *'रैखिक सममिति'* (linear symmetry) कहते हैं। परन्तु जब कभी सममिति सम्बन्धी किसी कथन में सममिति अक्ष का प्रयोग करते हैं तो विशेषण 'रैखिक' का बोध स्वयमेव हो जाता है, इसलिए हम 'रैखिक' शब्द का प्रयोग सदैव नहीं करेंगे।

दर्पण प्रतिबिम्ब और सममिति

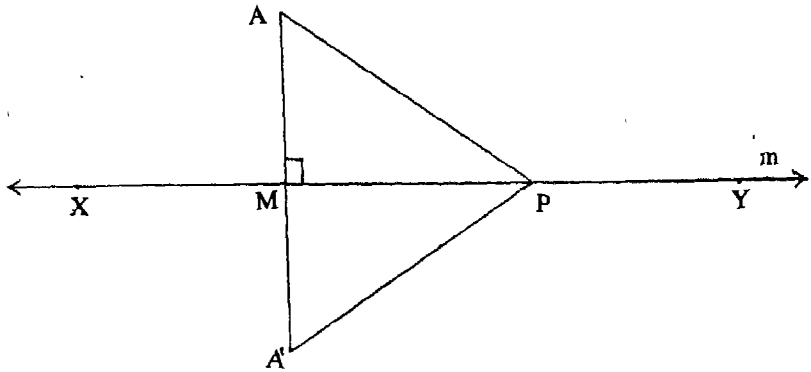
मान लीजिए A और A' दो बिन्दु हैं जो एक रेखा l के सापेक्ष परस्पर सममित हैं। हमें ज्ञात है, कि रेखा l, रेखाखण्ड AA' का लम्ब-समद्विभाजक है। मान लीजिए रेखा l के साथ-साथ एक दर्पण रखा है और उसके सम्मुख A एक वस्तु है। तब A', A का l में (दर्पण) प्रतिबिम्ब है। आपको याद होगा कि दर्पण में,

किसी वस्तु का प्रतिबिम्ब, दर्पण के पीछे उतना ही दूर होता है जितना कि वह वस्तु, दर्पण के सामने। इस प्रकार A' दर्पण l में, A का प्रतिबिम्ब होता है यदि रेखा l, रेखाखण्ड AA' का लम्ब समद्विभाजक हो। अतः रेखा l के सापेक्ष, A का सममित बिन्दु हो, दर्पण l में, A का प्रतिबिम्ब होता है।

अब मान लीजिए, उपरोक्त दर्पण द्विफलक वाला है। दर्पण l में, तब A' प्रतिबिम्ब है A का, और उसी दर्पण l में A प्रतिबिम्ब है, A' का। दो बिन्दुओं A और A' से बनाई गई यह आकृति ऐसी है कि दर्पण l में प्रतिबिम्बित होने पर, वह अपरिवर्तित रहती है। दोनों बिन्दुओं A और A' में से प्रत्येक दूसरे का दर्पण l में *प्रतिबिम्ब* होता है।

इस प्रकार रैखिक सममिति की संकल्पना का, दर्पण (रेखा) प्रतिबिम्ब के शब्दों में वर्णन कर सकते हैं।

प्रमेय 15.1 : *एक रेखा के सापेक्ष, दो सममित बिन्दु, उस रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु से समदूरस्थ होते हैं।*



आकृति 15.20

उपपत्ति : मान लीजिए, m सममिति अक्ष है और दो बिन्दु A और A', m के सापेक्ष सममित हैं। AA' को मिलाइए जो m को बिन्दु M पर प्रतिच्छेद करे तो परिभाषा से

$AM = A'M$ और $AM \perp m$ ... (1)

मान लीजिए, P रेखा m पर कोई बिन्दु है, यदि P, M से संपाती हो, तो (1) से

$AP = A'P$ ... (2)

यदि P, M से भिन्न हो तो AP और $A'P$ को मिलाइए।

अब त्रिभुजों AMP और $A'MP$ में,

$AM = A'M$ [(1) से]

$PM = PM$ (उभयनिष्ठ)

$\angle AMP = \angle A'MP$ (प्रत्येक समकोण)

$\therefore \ \Delta\ AMP \cong \Delta\ A'MP$ (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसम अभिगृहीत)

$\therefore \ AP = A'P$ (3)

अतः (2) और (3) से, m के प्रत्येक बिन्दु P के लिए

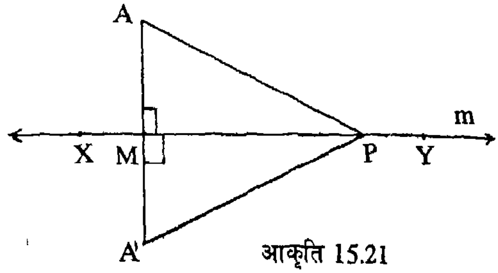
$AP = A'P$

उप-प्रमेय : *यदि दो बिन्दु A और A', एक रेखा m के सापेक्ष, सममित हों और कोई बिन्दु P, m पर स्थित हो, तो AP और $A'P$, m के साथ बराबर कोण बनाते हैं।*

[**उपपत्ति के लिए संकेत :** ऊपर दिए गए प्रमेय की उपपत्ति के अनुसार यह उपपत्ति दीजिए :

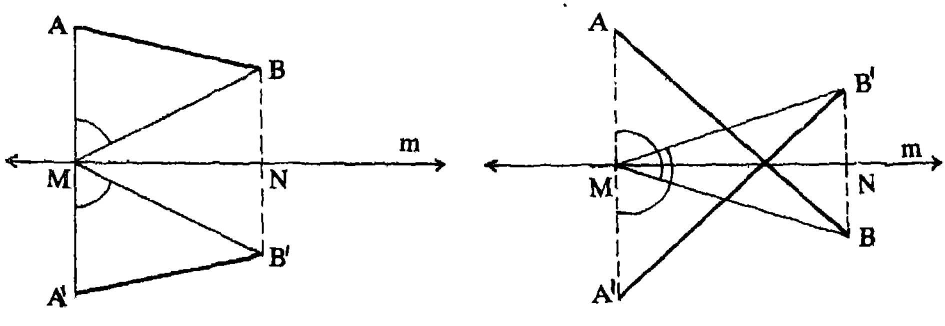
यदि P, M के साथ संपाती हो तो $AP \perp m$ और $A'P \perp m$ है।

यदि P, M पर संपाती न हो, तो $\Delta\ AMP \cong \Delta\ A'MP$ और इसलिए $\angle APM = \angle A'PM$]



आकृति 15.21

प्रमेय 15.2 : *यदि A, A' और B, B' दो बिन्दु युग्म हों, जिसमें प्रत्येक युग्म एक रेखा m के सापेक्ष, परस्पर सममित हो, तो $AB = A'B'$*



(i) आकृति 15.22 (ii)

उपपत्ति : AA' और BB' को मिलाइए जो रेखा m को बिन्दुओं M और N पर क्रमशः प्रतिच्छेद करें।

BM और $B'M$ को मिलाइए। क्योंकि B और B', रेखा m के सापेक्ष सममित हैं,

$\therefore\ BN = B'N$ ... (1)

और $\angle BMN = \angle B'MN$ ... (2)

तथा $MN = MN$ ... (3)

अतः $\Delta\ BMN \cong \Delta\ B'MN$ (भुजा-कोण-भुजा स० अ०)

अतः $BM = B'M$ ... (4)

दो स्थितियां सामने आती हैं :

स्थिति (i) : A, B रेखा m के एक ही ओर स्थित हैं। (आकृति 15.22 (i))

तो, A', B' भी रेखा m के एक ही ओर स्थित होंगे।

$\therefore\ \angle BMA = 90° - \angle BMN$

$= 90° - \angle B'MN$

$= \angle B'MA'$

और $AM = A'M$ (परिभाषा)

$BM = B'M$ (ऊपर सिद्ध किया)

$\therefore\ \Delta\ MAB \cong \Delta\ MA'B'$ (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसम अभिगृहीत)

अतः $AB = A'B'$

स्थिति (ii) : A, B रेखा m के विपरीत दिशा में स्थित हैं, तो A', B' भी रेखा m के विपरीत दिशा में स्थित होंगे।

$\angle BMA = 90° + \angle BMN$

$= 90° + \angle B'MN$

$= \angle B'MA'$

$AM = A'M$ (परिभाषा)

और $BM = B'M$ (परिभाषा)

$\therefore\ \Delta\ MAB \cong \Delta\ MA'B'$ (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसम अभिगृहीत)

अतः $AB = A'B'$

इस प्रकार, सभी स्थितियों में

$AB = A'B'$

प्रमेय 15.3 : *यदि रेखा m के सापेक्ष A, A'; B, B'; C, C'; सममित बिन्दु युग्म हैं, तो* $\angle ABC = \angle A'B'C'$

उपपत्ति : $AB, BC, CA, A'B', B'C',$ और $C'A'$ को मिलाइए (आकृति 15.23)।

क्योंकि A, A'; B, B'; सममिति बिन्दुओं के युग्म हैं,

$\therefore\ AB = A'B'$

इसी प्रकार

$BC = B'C'$

और $CA = C'A'$

अब त्रिभुजों ABC और $A'B'C'$ में,

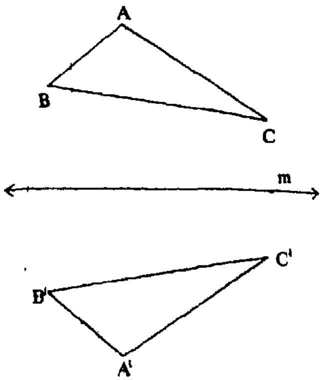
$AB = A'B'$

$BC = B'C'$

$CA = C'A'$

$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसम अभिगृहीत)

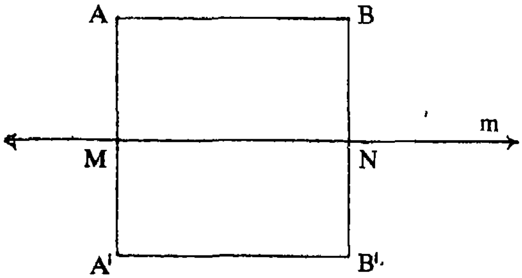
अतः $\angle ABC = \angle A'B'C'$



आकृति 15.23

प्रमेय 15.4 : *यदि A, A' और B, B', दो बिन्दु युग्म हों, जिनमें प्रत्येक युग्म रेखा m के सापेक्ष समित हो, और AB, m के समांतर हो, तो $A'B'$ भी m के समांतर होगा।*

उपपत्ति : AA' और BB' को मिलाइए, जो रेखा m को क्रमशः बिन्दुओं M और N पर प्रतिच्छेद करें (आकृति 15.24)।



आकृति 15.24

क्योंकि A, A' रेखा m के सापेक्ष समित हैं,

$\therefore\ AA' \perp m$ और $AA' = 2\,AM$ .. (1)

क्योंकि, B, B' रेखा m के सापेक्ष समित हैं,

$\therefore\ BB' \perp m$ और $BB' = 2\,BN$ ... (2)

क्योंकि $AB \parallel m$ व $AB \parallel MN$ (निर्दिष्ट)

$\therefore\ AM = BN$ ... (3)

(1), (2) और (3) से

$AA' = BB'$ और $AA' \parallel BB'$

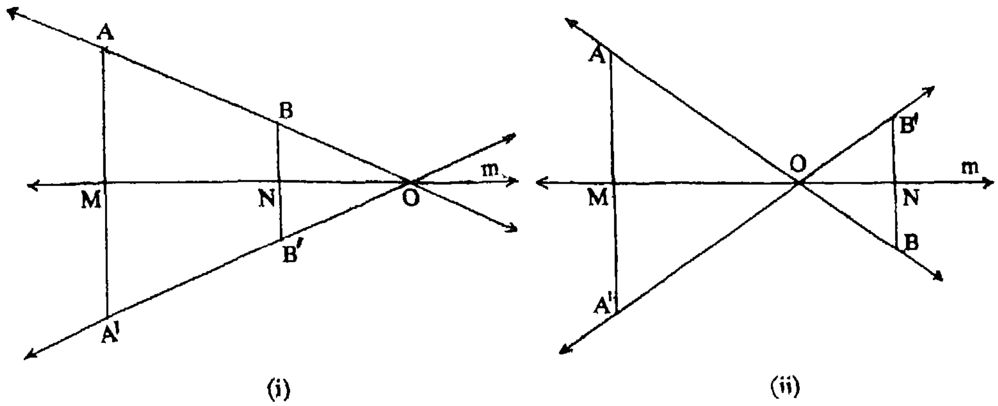
$\therefore\ AA'B'B$ एक समांतर चतुर्भुज है।

अतः $A'B' \parallel AB$

अब $AB \parallel A'B'$ और $AB \parallel m$

$\therefore\ A'B' \parallel m$

प्रमेय 15.5 : *यदि A, A' और B, B' दो बिन्दु युग्म हों, जिनमें प्रत्येक युग्म, रेखा m के सापेक्ष सममित हों और यदि AB, m के समांतर नहीं हो, तो रेखा AB और $A'B'$, रेखा m पर प्रतिच्छेद करेंगी।*



आकृति 15.25

उपपत्ति : AA' और BB' को मिलाइए, जो रेखा m को क्रमशः बिन्दु M और N पर प्रतिच्छेद करें। (आकृति 15.25)

क्योंकि AB रेखा m के समांतर नहीं है, इसलिए, रेखा AB, m को किसी बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करेगी।

OA' और OB' को मिलाइए।

क्योंकि A, A' रेखा m के सापेक्ष सममित हैं,

$\therefore \angle AOM = \angle A'OM$ ... (1)

क्योंकि B, B' रेखा m के सापेक्ष सममित हैं,

$\therefore \angle BON = \angle B'ON$ ... (2)

दो स्थितियां सामने आती हैं :

स्थिति (i) : A, B रेखा m के एक ही ओर हो (आकृति 15.25(i)) तो, O रेखा खण्ड AB का बिन्दु नहीं है।

$\therefore$ बिन्दु O, किरण AB (या किरण BA) पर है। आकृति 15.25 (i) में O किरण AB पर है। और इसलिए, OA, OB एक ही किरण है।

$\therefore \angle AOM = \angle BON$ ... (3)

(1), (2) और (3) से

$\angle A'OM = \angle B'ON$

और क्योंकि A', B' रेखा खण्ड m की एक ही ओर स्थित हैं,

$\therefore$ OA' और OB' एक ही किरण हैं।

अत: रेखा $A'B'$, m को O पर प्रतिच्छेद करती है

या AB, और $A'B'$, रेखा m पर प्रतिच्छेद करते हैं।

स्थिति (ii) : A, B रेखा m के विपरीत पक्ष में स्थित हो, (आकृति 15.25(ii))

तो O, रेखाखण्ड AB का एक बिन्दु है।

$\angle AOM = \angle BON$ (शीर्षाभिमुख कोण) ... (4)

(1), (2) और (4) से

$\angle A'OM = \angle B'ON$

और चूंकि A', B' रेखा m के विपरीत पक्ष में स्थित हैं,

$\therefore$ $A'O$ और OB' एक ही रेखा पर है या

रेखा $A'B'$, m को O पर प्रतिच्छेद करता है।

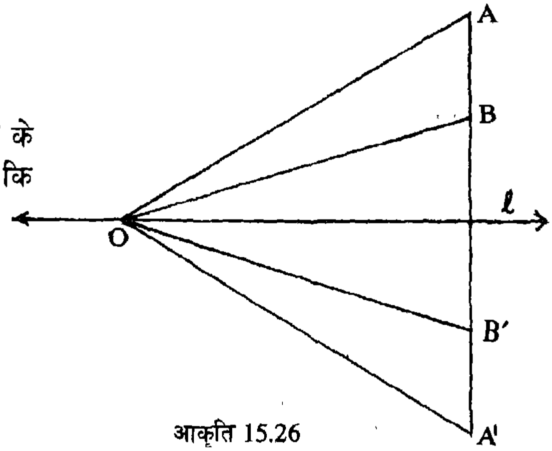
$\therefore$ AB और $A'B'$, रेखा m पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अत: सभी स्थितियों में,

AB और $A'B'$, रेखा m पर प्रतिच्छेद करते हैं।

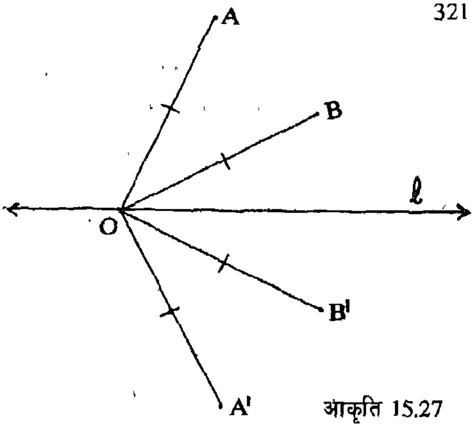
प्रश्नावली 15.2

1. आकृति 15.26 में, A, A' और B, B', l के सापेक्ष सममित बिन्दु युग्म हैं, सिद्ध कीजिए कि $\angle AOB = \angle A'OB'$.



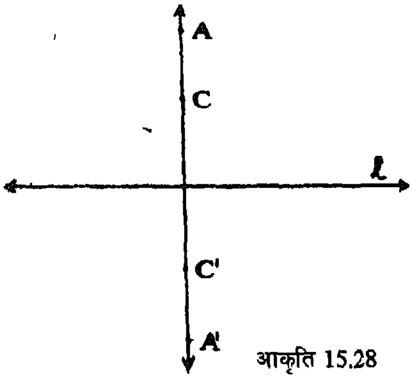
आकृति 15.26

2. आकृति 15.27 में, $OA = OB = OB'$ $= OA'$, $\angle AOB = \angle A'OB'$, और B, B', रेखा l के सापेक्ष सममित हैं। सिद्ध कीजिए कि A, A' भी, रेखा l के सापेक्ष सममित हैं।



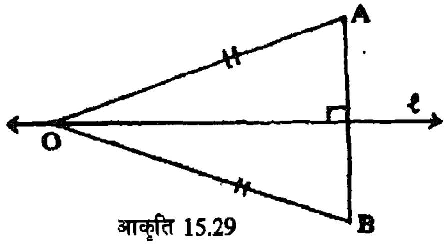
आकृति 15.27

3. आकृति 15.28 में, बिन्दु A, A', रेखा l के सापेक्ष सममित हैं। यदि $AC = A'C'$, तो सिद्ध कीजिए कि C, C', रेखा l के सापेक्ष सममित हैं।



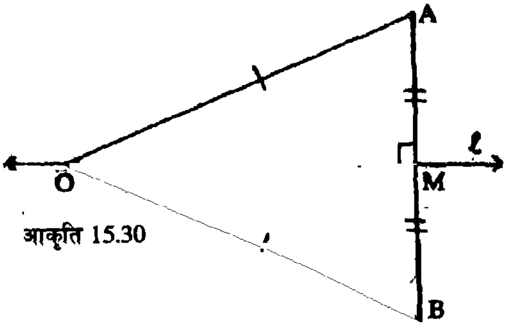
आकृति 15.28

4. आकृति 15.29 में, $OA = OB$ और $AB \perp l$ है। सिद्ध कीजिए कि A और B, रेखा l के सापेक्ष सममित हैं।



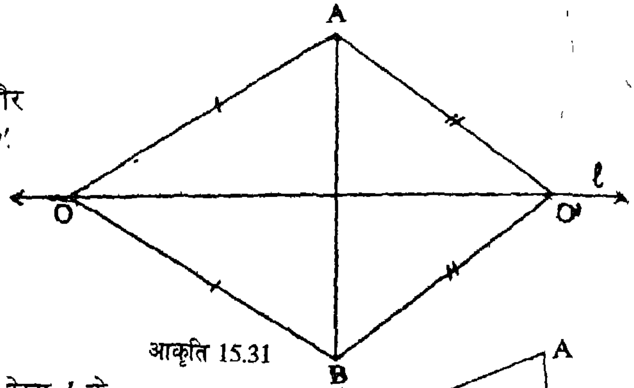
आकृति 15.29

5. आकृति 15.30 में, $OA = OB$ और $AM = BM$ है। सिद्ध कीजिए कि रेखा l, A, B का सममिति अक्ष है।



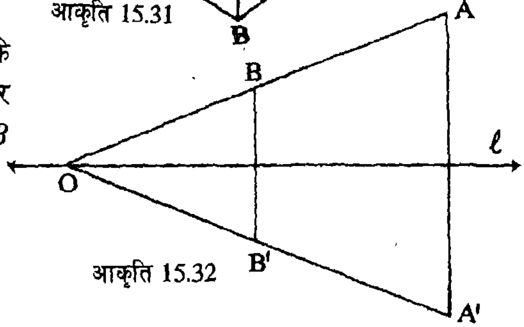
आकृति 15.30

6. आकृति 15.31 में, $OA = OB$ और $O'A = O'B$, तो दिखाइए कि OO' A और B का सममिति अक्ष है।



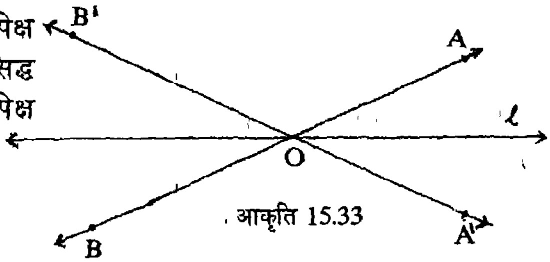
आकृति 15.31

7. आकृति 15.32 में, A और A', रेखा l के सापेक्ष सममित हैं। B, B' क्रमशः OA और OA' के मध्य बिन्दु हैं, सिद्ध कीजिए कि B और B', रेखा l के सापेक्ष सममित हैं।



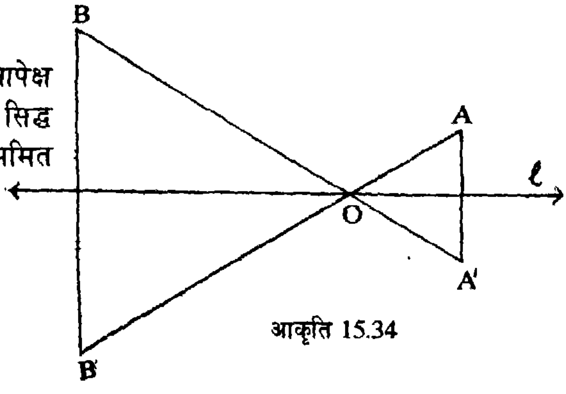
आकृति 15.32

8. आकृति 15.33 में, A, A'; रेखा l के सापेक्ष सममित हैं। यदि $OB = OB'$, तो सिद्ध कीजिए कि B और B', रेखा l के सापेक्ष सममित हैं।



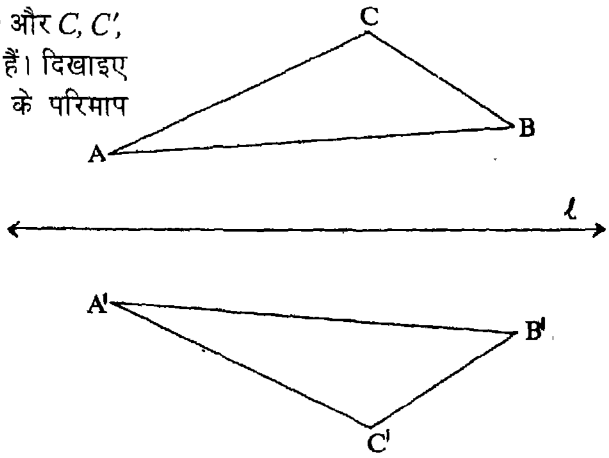
आकृति 15.33

9. आकृति 15.34 में, A, A' रेखा l के सापेक्ष सममित हैं। और $AA' \parallel BB'$ है। सिद्ध कीजिए कि B, B' भी रेखा l के सापेक्ष सममित हैं।



आकृति 15.34

10. आकृति 15.35 में, $A, A'; B, B';$ और C, C', l के सापेक्ष सममित बिन्दु युग्म हैं। दिखाइए कि ΔABC और $\Delta A'B'C'$ के परिमाप बराबर हैं।



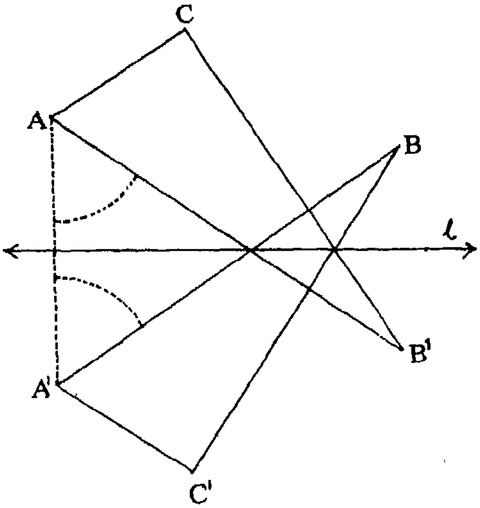
आकृति 15.35

11. दिखाइए कि एक समबाहु त्रिभुज का दर्पण प्रतिबिम्ब भी समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

12. यदि $A, A'; B, B'$ और C, C', किसी रेखा के सापेक्ष, सममित बिन्दुओं के युग्म हों (आकृति 15.36) तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुजों $AB'C$ और $A'BC'$ के परिमाप बराबर होंगे।

13. यदि A, A' और B, B' सममित बिन्दुओं के दो युग्म हों, आकृति 15.36, तो सिद्ध कीजिए कि AB' और $A'B$, सममिति अक्ष पर प्रतिच्छेद करते हैं।

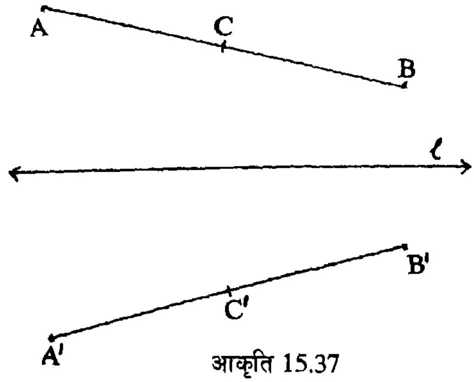
14. यदि A, A' रेखा BB' के सापेक्ष सममित हैं, और B, B' रेखा AA' के सापेक्ष सममित हैं, तो दिखाइए कि $AB\,A'B'$ एक समचतुर्भुज है।



आकृति 15.36

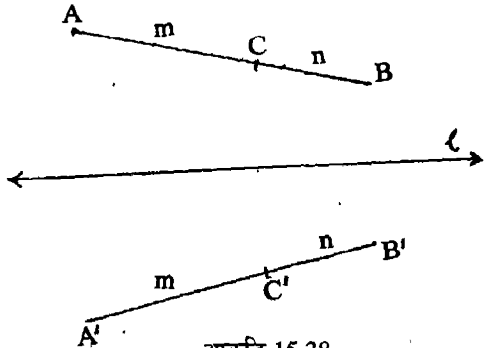
15. आकृति 15.36 में दिखाइए, कि
$\angle AA'B = \angle A'AB'$

16. आकृति 15.37 में, A, A' और B, B' रेखा l के सापेक्ष सममित बिन्दु युग्म हैं। यदि C, C' क्रमशः AB और $A'B'$ के मध्य बिन्दु हों, तो दिखाइए कि C, C' रेखा l के सापेक्ष सममित हैं।



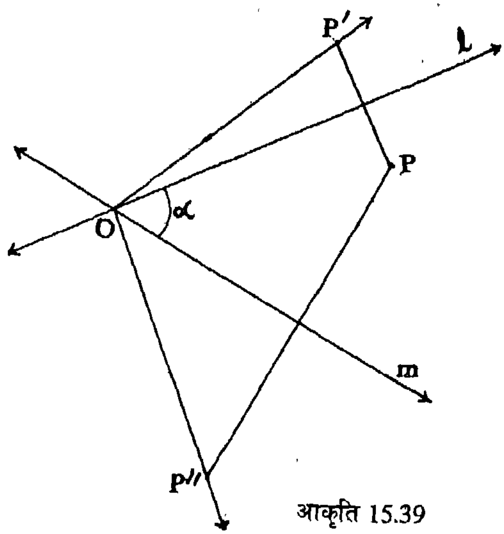
आकृति 15.37

17. आकृति 15.38 में, A, A' और B, B', रेखा l के सापेक्ष सममित बिन्दु युग्म हैं। बिन्दु C, AB को $m : n$ के अनुपात में, और C', $A'B'$ को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करते हैं। दिखाइए कि C, C' रेखा l के सापेक्ष सममित हैं।



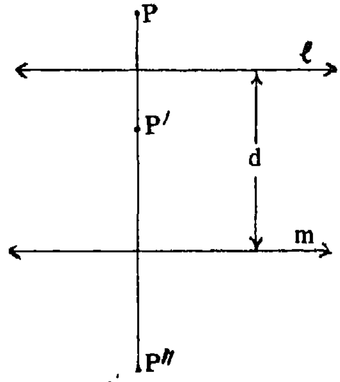
आकृति 15.38

18. आकृति 15.39 में, P' रेखा l के सापेक्ष P के सममित है, और P'' रेखा m के सापेक्ष P के सममित है। दिखाइए कि $\angle P'OP''$ एक अचर है।
[**संकेत** : दिखाइए कि $\angle P'OP'' = 2\alpha$]



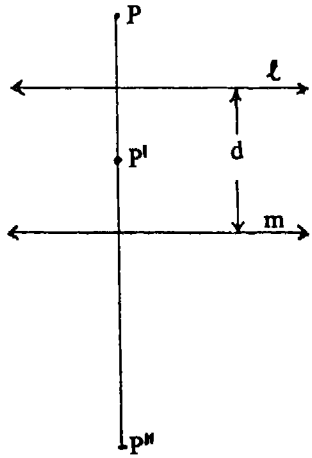
आकृति 15.39

19. आकृति 15.40 में, $l \parallel m$ और d उनके बीच की दूरी है। यदि P' रेखा l के सापेक्ष P के सममित हो, और P'' रेखा m के सापेक्ष P' के सममित हो, तो PP'' की लम्बाई एक अचर है।
[**संकेत** : दिखाइए कि $PP'' = 2d$]



आकृति 15.40

20. आकृति 15.41 में, $l \parallel m$ और d उनके बीच की दूरी है। यदि P' रेखा l के सापेक्ष P के सममित हो, और P'' रेखा m के सापेक्ष P के सममित हो, तो दिखाइए कि $P'P''$ की लम्बाई एक अचर है।
[**संकेत** : दिखाइए कि $P'P'' = 2d$]

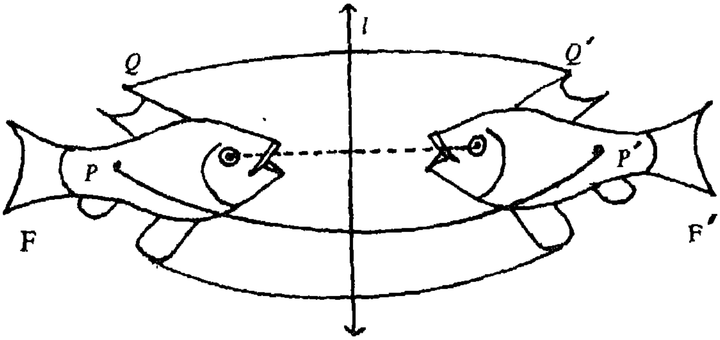


आकृति 15.41

15.4 किसी रेखा के सापेक्ष सममित आकृतियां

हमने प्रारंभ में सममित बिन्दुओं की परिभाषा दी और कुछ प्रमेय सिद्ध किए। सममित आकृतियों के संबंध में हमारी परिभाषा क्या होनी चाहिए? हमने देखा था कि दो आकृतियां F और F', एक रेखा l के सापेक्ष सममित होती हैं यदि, काग़ज़ के पन्ने को, जिस पर आकृतियां बनी हैं, l के साथ-साथ तह करने पर, दोनों आकृतियां परस्पर संपाती हो जाएं। इसका अर्थ है कि आकृति F के प्रत्येक बिन्दु P के संगत

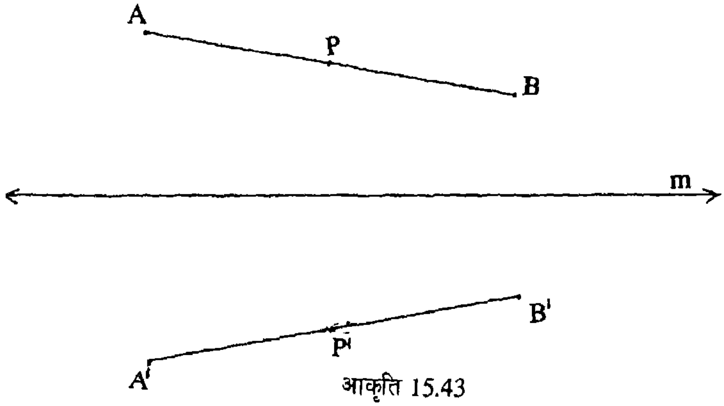
आकृति F' का एक बिन्दु P' है, जो P के समर्मित है और आकृति F' के प्रत्येक बिन्दु Q' के संगत आकृति F का एक बिन्दु Q है जो Q' के सममित है। अतः हमारी परिभाषा निम्नलिखित है।



आकृति 15.42

परिभाषा : *दो आकृतियाँ F और F', एक रेखा l के सापेक्ष सममित होती हैं, यदि F के प्रत्येक बिन्दु P के संगत, आकृति F' का एक बिन्दु P' है, जो P के सममित हो और आकृति F' के प्रत्येक बिन्दु Q' के संगत आकृति F का बिन्दु Q है जो Q' के सममित हो। (देखिए आकृति 15.42)*

प्रमेय 15.6 : *यदि A, A' और B, B', दो बिन्दु युग्म हों, जिनमें प्रत्येक युग्म, रेखा m के सापेक्ष सममित हों, तो रेखाखण्ड AB और A'B', रेखा m के सापेक्ष सममित होते हैं।*



आकृति 15.43

उपपत्ति : मान लीजिए रेखा खण्ड AB का P कोई बिन्दु है और P', रेखा m के सापेक्ष, P का सममित बिन्दु है।

अब A, A' और P, P' रेखा m के सापेक्ष सममित दो बिन्दु युग्म हैं,

$\therefore\ AP = A'P'$ ... (1)

इसी प्रकार

$AB = A'B'$ और $PB = P'B'$ ... (2)

क्योंकि P रेखांखण्ड AB पर है,

$\therefore\ AP + PB = AB$ ... (3)

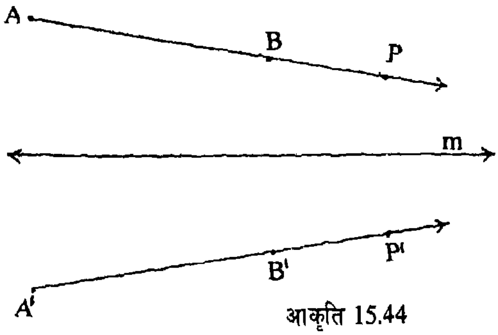
(1), (2) और (3) से

$$A'P' + P'B' = AP + PB = AB$$
$$= A'B' \quad \text{... (4)}$$

$\therefore$ P', रेखा खण्ड $A'B'$ का बिन्दु है। इसी प्रकार, यदि Q', $A'B'$ का कोई बिन्दु है और बिन्दु Q, रेखा m के सापेक्ष Q' के सममित हो, तो बिन्दु Q रेखाखण्ड AB पर होगा। अतः रेखाखण्ड AB और $A'B'$, रेखा m के सापेक्ष सममित हैं।

उप-प्रमेय : *यदि A, A' और B, B' दो बिन्दु युग्म हों, और प्रत्येक युग्म, रेखा m के सापेक्ष सममित हों, तो किरण AB और $A'B'$, रेखा m के सापेक्ष सममित होते हैं।*

उपपत्ति : मान लीजिए P, किरण AB का कोई बिन्दु है, जो A और B से भिन्न है।
तो या तो P, रेखाखण्ड AB का बिन्दु है, (आकृति 15.43)
या P, रेखा खण्ड AB का बिन्दु नहीं है, (आकृति 15.44)



आकृति 15.44

$\therefore AP + PB = AB$ (आकृति 15.43)

या $AB + BP = AP$ (आकृति 15.44) ... (1)

मान लीजिए P', रेखा m के सापेक्ष P के सममित है, तो

$AP = A'P'$, $AB = A'B'$, $BP = B'P'$ ... (2)

यदि P, रेखा खण्ड AB पर है, तो

$A'P' + P'B' = AP + PB = AB = A'B'$

$\therefore$ P', रेखाखण्ड $A'B'$ पर है ... (3)

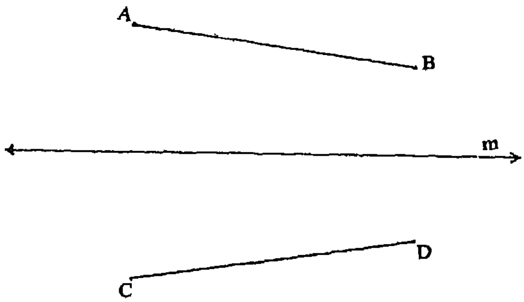
यदि B, रेखाखण्ड AP पर है (आकृति 15.44) तो

$A'B' + B'P' = AB + BP = AP = A'P'$

$\therefore$ B', रेखाखण्ड $A'P'$ पर है, ... (4)

(3) और (4) से,
P', किरण $A'B'$ का बिन्दु है।
इसी प्रकार यदि Q' किरण $A'B'$ का कोई बिन्दु है, और Q, रेखा m के सापेक्ष Q' के सममित है तो Q किरण AB का बिन्दु होगा।
अतः किरण AB और $A'B'$, रेखा m के सापेक्ष सममित हैं।

प्रमेय 15.7 : *यदि दो रेखाखण्ड, एक रेखा के सापेक्ष सममित हों तो वे बराबर लम्बाई के होते हैं।*



आकृति 15.45

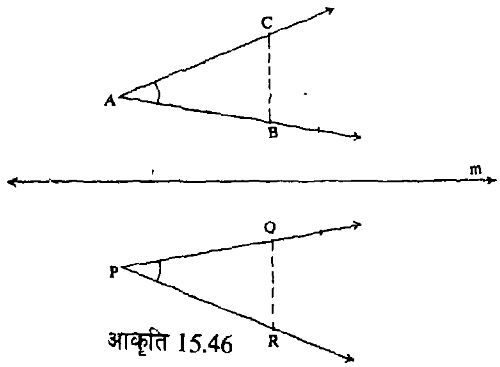
उपपत्ति : मान लीजिए, रेखाखण्ड AB और CD, एक रेखा m के सापेक्ष सममित है।
और मान लीजिए, बिन्दु A', B', रेखा m के सापेक्ष, क्रमशः A और B के सममित है तो हम जानते हैं कि

$A'B' = AB$ ... (1)

और रेखाखण्ड $A'B'$, रेखा m के सापेक्ष, AB के सममित है।
परन्तु AB और CD रेखा m के सापेक्ष सममित है।
$\therefore$ रेखाखण्ड CD और $A'B'$ एक ही हैं।
(1) और (2) से, $AB = CD$ ... (2)

प्रमेय 15.8 : *यदि दो कोण, एक रेखा के सापेक्ष सममित हों, तो उनके माप समान होते हैं।*

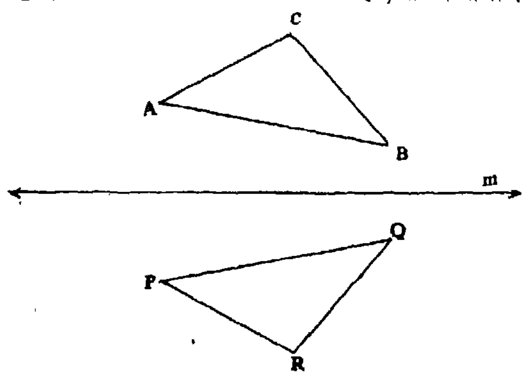
उपपत्ति : मान लीजिए, $\angle BAC$ और $\angle QPR$, रेखा m के सापेक्ष सममित हैं।
मान लीजिए, A', B', C', रेखा m के सापेक्ष क्रमशः A, B, C के सममित है।
क्योंकि A, AB और AC का उभयनिष्ठ बिन्दु है।
$\therefore$ A', PQ और PR का उभयनिष्ठ बिन्दु है।
अतः A' और P संपाती हैं।



आकृति 15.46

या A और P, रेखा m के सापेक्ष सममित हैं।
अब B', $\angle QPR$ का एक बिन्दु है और B' बिन्दु P से भिन्न है।
$\therefore$ B', किरण PQ या किरण PR पर है।
इसी प्रकार,
C', $\angle QPR$ का एक बिन्दु है और C, बिन्दु P से भिन्न है।
क्योंकि B, C अलग-अलग किरणों पर हैं,
$\therefore$ B', C' भी भिन्न-भिन्न किरणों पर हैं।
$\therefore$ $\angle B'A'C'$ और $\angle QPR$ समान हैं।
हम जानते हैं कि
$\angle B'A'C' = \angle BAC$
$\therefore$ $\angle QPR = \angle BAC$

प्रमेय 15.9 : *यदि दो त्रिभुज, एक रेखा के सापेक्ष सममित हों, तो वे सर्वांगसम होंगे।*



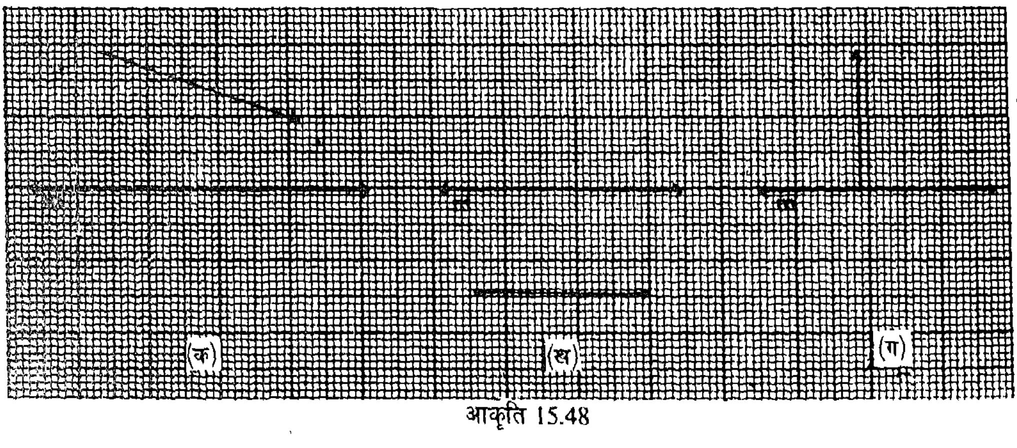
आकृति 15.47

उपपत्ति : मान लीजिए $\Delta\ ABC$ और $\Delta\ PQR$, रेखा m के सापेक्ष सममित हैं।
मान लीजिए A', B', C', रेखा m के सापेक्ष क्रमशः A, B, C के सममित है।
क्योंकि A, $\Delta\ ABC$ का शीर्ष है, इसलिए, A' भी $\Delta\ PQR$ का एक शीर्ष होगा।
इसी प्रकार, B' और C' भी, $\Delta\ PQR$ के शीर्ष हैं।
$\therefore$ त्रिभुजों ABC और PQR के शीर्षों में, एक ऐसी संगतता है, जिससे कि संगत शीर्षों का प्रत्येक युग्म, रेखा m के सापेक्ष, सममित होते हैं।
मान लीजिए $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q, C \leftrightarrow R$.
तब, $A, P; B, Q;$ और C, R तीन बिन्दु युग्म हैं, जिनमें से प्रत्येक रेखा m के सापेक्ष परस्पर सममित हैं।
$\therefore\ AB = PQ, BC = QR, CA = RP$
अतः $\Delta\ ABC \cong \Delta\ PQR$ (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसम प्रमेय)

टिप्पणी : कल्पना कीजिए कि आप $\Delta\ ABC$ के साथ साथ, A से B, B से C और C से A की ओर अर्थात् वामावर्त दिशा में जा रहे हैं। आपका प्रतिबिम्ब $\Delta\ A'B'C'$ के साथ-साथ कैसे जाता है? यह A' से $B'B'$ से C' और C' से A' को, अर्थात् दक्षिणावर्त दिशा में जाता है। अतः दो त्रिभुज जो एक रेखा के सापेक्ष सर्वांगसम होते हैं, परन्तु उनकी दिशाएं [या अभिविन्यास (orientations)] एक दूसरे के विपरीत होती हैं।

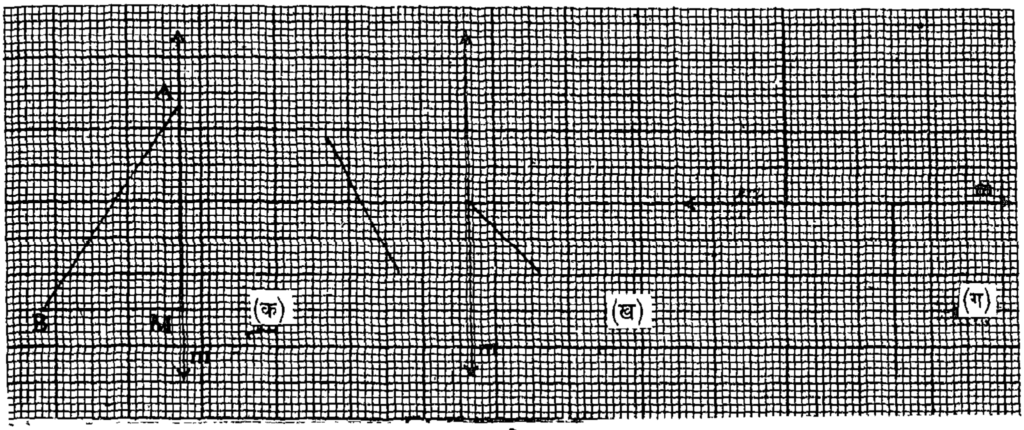
प्रश्नावली 15.3

1. ग्राफ़ पेपर पर दी गई निम्न आकृतियों में से प्रत्येक को देखिए (आकृति 15.48)। प्रत्येक आकृति में एक रेखा m और उसपर एक ओर एक तीर दिखाया गया है। सरलता से रेखा m के साक्षेप दिए गए तीर के सममित एक तीर बनाइए।



आकृति 15.48

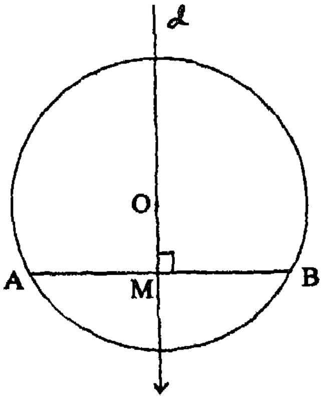
2. ग्राफ़ पेपर पर दी गई निम्न आकृतियों में से प्रत्येक को देखिए (आकृति 15.49)। प्रत्येक आकृति में, एक रेखा m और रेखा m के सममित किसी आकृति के कुछ भाग दिये



आकृति 15.49

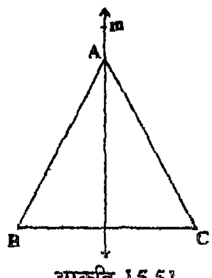
गए हैं। सरलता से, आकृति को पूरा कीजिए।

3. एक वृत्त का केन्द्र O है और d उसका एक व्यास है। AB एक जीवा है जो व्यास d पर लम्ब है। दिखाइए कि d, रेखा खण्ड AB का समद्विभाजन करता है। तथ्य का निगमन कीजिए कि वृत्त अपने प्रत्येक व्यास के सापेक्ष सममित होता है।



आकृति 15.50

4. दिया है कि ΔABC, शीर्ष A से होकर जाने वाली एक रेखा m के सापेक्ष सममित है (आकृति 15.51)। दिखाइए कि
   (i) ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है और $AB = AC$
   (ii) m, भुजा BC का लम्ब-समद्विभाजक है।
   (iii) $\angle B = \angle C$
   (iv) m, $\angle A$ का समद्विभाजन करता है।



आकृति 15.51

5. चतुर्भुज $ABCD$, अपने प्रत्येक विकर्ण AC और BD के सापेक्ष सममित है। दिखाइए कि
   (i) विकर्ण परस्पर लम्ब-समद्विभाजन करते हैं;

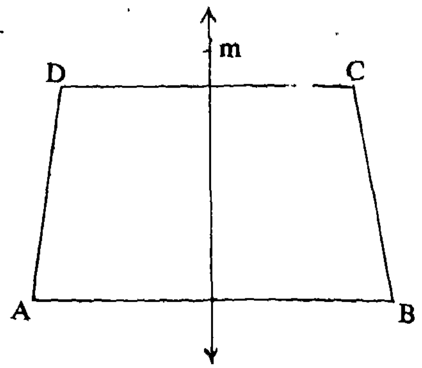
(ii) चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है, और

(iii) प्रत्येक विकर्ण, उन कोणों का समद्विभाजन करता है, जिनसे होकर यह जाता है।

6. $ABCD$ एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel DC$ है। रेखा m, भुजाओं AB और CD का लम्ब समद्विभाजक है (आकृति 15.52)। दिखाइए कि m, चतुर्भुज $ABCD$ का एक सममिति अक्ष है। यह दिखाइए कि समलम्ब $ABCD$ समद्विबाहु है, जिसमें

(i) $BC = AD$, (ii) $\angle A = \angle B$ और

(iii) $\angle D = \angle C$



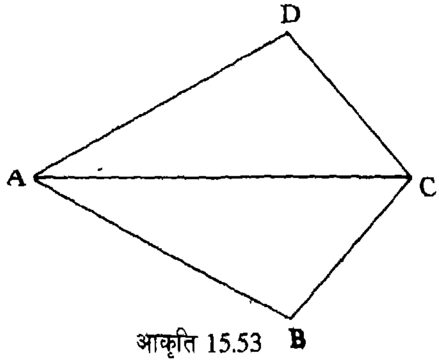
आकृति 15.52

7. एक उत्तल चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण AC ही उसका केवल एक सममिति अक्ष है (आकृति 15.53)। दिखाइए कि

(i) यह चतुर्भुज एक पतंग के आकार का है।

(ii) दोनों विकर्ण परस्पर लम्ब हैं और

(iii) सम्मुख कोणों का एक युग्म परस्पर बराबर हैं।



आकृति 15.53

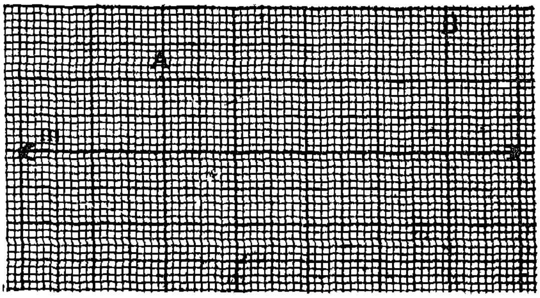
8. एक चतुर्भुज $ABCD$ का केवल एक ही सममिति अक्ष है और वह उसका विकर्ण नहीं है। दिखाइए कि चतुर्भज एक समद्विबाहु समलम्ब है।

9. चतुर्भुज $ABCD$ के दो सममिति अक्ष हैं और वे इसके विकर्ण नहीं हैं। दिखाइए कि $ABCD$ एक आयत है।
[**संकेत** : मान लीजिए कि $ABCD$ का एक सममिति अक्ष m है जो AB और DC को प्रतिच्छेद करता है। तो m, AB और DC का लम्ब-समद्विभाजक है, अतः $AB \parallel DC$ और $\angle A = \angle B$, इत्यादि]

10. चतुर्भुज $ABCD$ के चार सममिति अक्ष हैं, जिनमें दो उसके विकर्ण हैं। दिखाइए कि $ABCD$ एक वर्ग है।
[**संकेत** : प्रश्न 5 और 9 का प्रयोग कीजिए।]

11. ग्राफ़ पेपर पर दी गई आकृति को देखिए (आकृति 15.54)। दो बिन्दु A और B रेखा m के एक ओर स्थित हैं। रेखा m पर एक ऐसा बिन्दु X ज्ञात कीजिए जिससे कि $AX + BX$ न्यूनतनम हो।

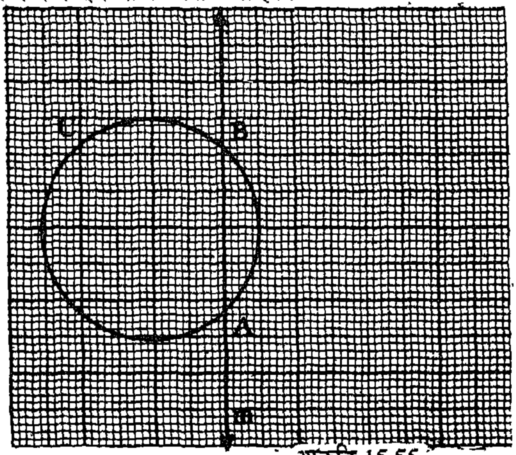
[**संकेत** : मान लीजिए रेखा m के सापेक्ष, A का सममित बिन्दु A' है। $A'B$ को मिलाइए जो m को X पर प्रतिच्छेद करे। तब X ही अभीष्ट बिन्दु है। इसे सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि $AX + XB = XA' + XB = A'B$, और यदि Y का अन्य बिन्दु m पर है, तो $YA + YB = YA' + YB > A'B$]



आकृति 15.54

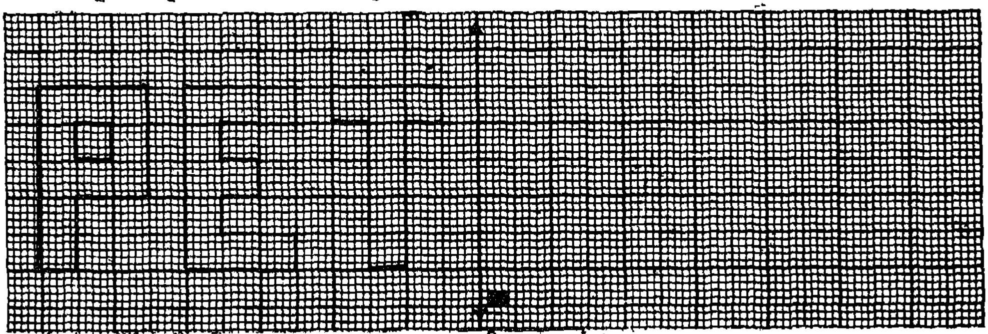
12. ऐसे दो समान रेखा खण्ड खींचने हैं जिनका केवल एक सममिति अक्ष हो। रेखाखण्डों की सभी सम्भव स्थितियां प्रदर्शित कीजिए। [**संकेत** : यहां पर तीन अलग स्थितियां सम्भव हैं।]

13. ग्राफ़ पेपर पर दी गई आकृति को देखिए (आकृति 15.55)। अब, रेखा m के सापेक्ष, दिये हुए वृत्त के सममित वृत्त को बनाइए। क्या पूर्ण आकृति का कोई अन्य सममिति अक्ष भी है? क्या ये दोनों वृत्त सर्वांगसम हैं? इनके अभिविन्यास (orientations) के बारे में आप क्या कहेंगे?



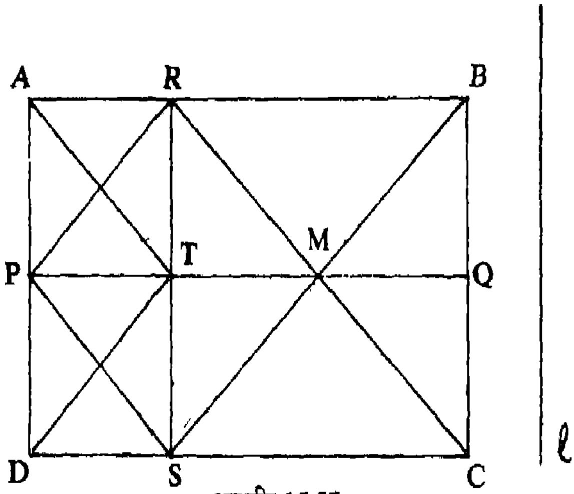
आकृति 15.55

14. ग्राफ़ पेपर पर दी गई आकृति को देखिए (आकृति 15.56)। अब, रेखा m के सापेक्ष, दी हुई आकृति के सममित आकृति को बनाइए। देखने पर आपको क्या प्राप्त होता है?



आकृति 15.56

15. आकृति 15.57 में, एक ख़ाका दिया है। रेखा l के सापेक्ष, A', B', C', · क्रमशः A, B, C, ... के सममित है; परन्तु इन्हें प्रकट नहीं किया गया है। दी हुई आकृति के सममित आकृति बनाये बिना, निम्नलिखित कथनों की जांच कीजिए और बताइए कि वे सही हैं या गलत।



आकृति 15.57

(क) $A'B'C'D'$ एक वर्ग है।

(ख) $A'B' \parallel C'D'$

(ग) $A'B' \perp R'S'$

(घ) $P'R'M'S'$ एक वर्ग है

(ङ) $A'T' \parallel P'R'$

(च) रेखाखण्ड $P'Q'$, $R'Q'$, $B'S'$ संगामी हैं

(छ) $A'T' = T'D'$

(ज) $A'B' \perp A'Q'$

(झ) $\angle B'M'R' = 90°$

(ञ) $\angle A'T'P' = 30°$

अध्याय 16

त्रिकोणमिति

16.1 भूमिका

इस अध्याय में हम गणित की एक प्रमुख शाखा का जिसे *त्रिकोणमिति* (trigonometry) कहते हैं, अध्ययन करेंगे। 'त्रिकोणमिति' का शाब्दिक अर्थ है : 'त्रिभुज की भुजाओं का मापन'। त्रिकोणमिति का मुख्य उद्देश्य, निम्नलिखित प्रश्न को हल करना है;

यदि एक त्रिभुज की कुछ भुजाएं और कोण ज्ञात हों, तो किस प्रकार शेष भुजाओं और कोणों को ज्ञात किया जाए?

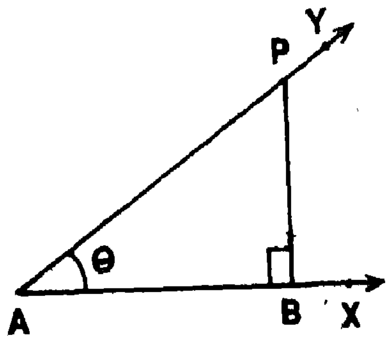
इस समस्या का हल, हम एक समकोण त्रिभुज के न्यून कोणों के सापेक्ष, उसकी भुजाओं के परस्पर अनुपातों का प्रयोग करके करते हैं। इन अनुपातों को कोणों का *त्रिकोणमितीय अनुपात* (trigonometric ratios) कहते हैं। ऐसे प्रश्न प्राय: खगोलिकी, इंजीनियरी सर्वेक्षण, नौसंचालन आदि से संबंधित होते हैं जिन्हें हल करने होते हैं। इस तरह हम यह देखते हैं कि त्रिकोणमितीय अनुपातों के अध्ययन की अत्यधिक व्यावहारिक उपयोगिता है।

16.2 कोण के Sine, Cosine तथा Tangent

आकृति 16.1 में, θ (कोण YAX) एक न्यून कोण दिया है उसकी भुजा AY पर कोई बिन्दु P लीजिए और PB, AX पर लम्ब खींचिए।

इस प्रकार हमें $\Delta\, PAB$ एक समकोण त्रिभुज प्राप्त होता है जिसमें $\angle PAB = \theta$ है। अनुपात $\frac{PB}{AP}$ को कोण θ का sine कहते हैं। संक्षेप में हम इसे $\sin\theta$ लिखते हैं:

अत: $$\sin\theta = \frac{PB}{AP}$$



आकृति 16.1

क्योंकि समकोण त्रिभुज PAB में भुजा PB, कोण θ के सम्मुख है और AP कर्ण है, अतः

$$\sin \theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

अब सम्भवतः आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि यदि P की स्थिति AY पर कहीं और हो तो क्या होगा?

यदि बिन्दु P को भिन्न-भिन्न स्थितियों पर लें तो PB और AP की लम्बाइयों में तो अंतर आ जाएगा परन्तु अनुपात $\frac{PB}{AP}$ पहले के समान ही रहेगा। इस तथ्य को समरूप त्रिभुज लेकर सिद्ध किया जा सकता है। यहाँ हम बिना उपपत्ति के इस तथ्य को सही स्वीकार कर लेते हैं।

ΔPAB के संबंध में, जहाँ $\angle PAB = \theta$, हम कोण θ के दो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं:

$$\text{cosine } \theta = \frac{AB}{AP}, \quad \text{tangent } \theta = \frac{PB}{AB}$$

या संक्षेप में $$\cos \theta = \frac{AB}{AP}, \quad \tan \theta = \frac{PB}{AB}$$

क्योंकि ΔPAB में θ की संलग्न भुजा AB हैं; अतः

$$\cos \theta = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}}$$

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि $\sin \theta$ की तरह $\cos \theta$ और $\tan \theta$ भी कोण θ पर निर्भर करते हैं न कि त्रिभुज के आमाप पर।

टिप्पणी : ध्यान रहे कि $\sin \theta$, 'कोण θ के sine' का संक्षिप्त रूप है। यह sin और θ का गुणनफल नहीं है।

उदाहरण 16.1 : ΔPQR में, $\angle Q$ समकोण है, $PQ = 3$, $QR = 4$ है। यदि $\angle P = \alpha$, $\angle R = \beta$, तो $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \sin \beta, \cos \beta$ और $\tan \beta$, ज्ञात कीजिए।

हल : एक त्रिभुज PQR बनाइए/ जिसका कोण Q समकोण हो (आकृति 16.2)।
पाइथागोरस प्रमेय से

कर्ण $RP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

कोण α के लिए,

संलग्न भुजा $= 3$, और सम्मुख भुजा $= 4$

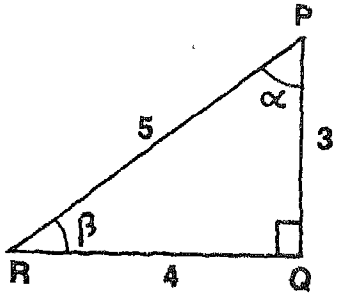
कोण β के लिए,

संलग्न भुजा = 4, सम्मुख भुजा = 3

अतः $\sin\alpha = \dfrac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{4}{5}$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{3}{5}$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}} = \dfrac{4}{3}$



आकृति 16.2

इसी प्रकार,

$$\sin\beta = \frac{3}{5},\ \cos\beta = \frac{4}{5},\ \tan\beta = \frac{3}{4}$$

प्रश्नावली 16.1

1. ΔABC में, $\angle A$ समकोण है। निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए, $\sin B$, $\cos C$ और $\tan B$ के मान लिखिए :
   (क) $BC = \sqrt{2},\quad AB = AC = 1$
   (ख) $AB = 5,\quad AC = 12,\quad BC = 13$
   (ग) $AB = 12,\quad AC = 5,\quad BC = 13$
   (घ) $AB = 20,\quad AC = 21,\quad BC = 29$

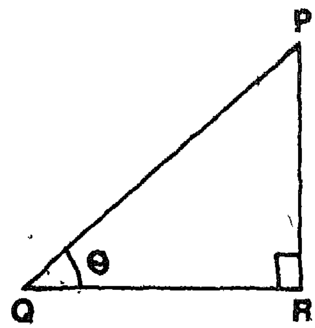
16.3 sin θ, cos θ और tan θ में सम्बन्ध

कोण θ के अनुपातों $\sin\theta$, $\cos\theta$ और $\tan\theta$ में निकट का सम्बन्ध है। यदि उनमें से कोई एक ज्ञात हो, तो हम हम अन्य दो का परिकलन आसानी से कर सकते हैं।

आकृति 16.3 में,

$$\sin\theta = \frac{PR}{QP},\quad \cos\theta = \frac{QR}{QP},$$

$$\tan\theta = \frac{PR}{QR}$$



आकृति 16.3

अतः $\tan\theta = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{PR/QP}{QR/QP} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

उदाहरण 16.2 : यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ हो, तो $\cos\theta$ और $\tan\theta$ ज्ञात कीजिए।

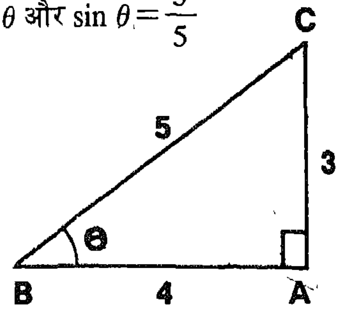
हल : एक समकोण त्रिभुज बनाइए, जिसमें $\angle ABC = \theta$ और $\sin\theta = \frac{3}{5}$ (आकृति 16.4)

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, तीसरी भुजा

$AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$\therefore \cos\theta = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{5}$

और $\tan\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}} = \frac{3}{4}$



आकृति 16.4

उदाहरण 16.3 : यदि $\cos A = \frac{1}{3}$ हो, तो $\sin A$ और $\tan A$ ज्ञात कीजिए।

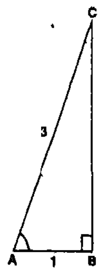
हल : एक ऐसा समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिससे कि $\cos A = \frac{1}{3}$ (आकृति 16.5)।

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, तीसरी भुजा

$BC = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

अब, $\sin A = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan A = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$



आकृति 16.5

उदाहरण 16.4 : यदि $\tan B = \sqrt{3}$, तो $\sin B$ और $\cos B$ ज्ञात कीजिए।

हल : एक ऐसा समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिससे कि

$\tan B = \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{1}}$ (आकृति 16.6)।

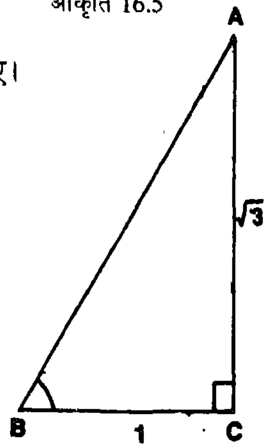
पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार

$AB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$

$= \sqrt{3+1} = 2$

अब, $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$



आकृति 16.6

प्रश्नावली 16.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक तीन त्रिकोणमितीय अनुपातों में से एक त्रिकोणमितीय अनुपात दिया हुआ है। अन्य दो अनुपात ज्ञात कीजिए :

(1) $\sin A = \frac{2}{3}$ (2) $\cos B = \frac{4}{5}$ (3) $\cos \theta = \frac{1}{5}$

(4) $\tan C = 11$ (5) $\sin \beta = \frac{11}{15}$ (6) $\tan M = \frac{5}{12}$

16.4 अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात

कोण θ के sine, cosine और tangent के अतिरिक्त कोण θ के तीन अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात cotangent, secant और cosecant होते हैं जिन्हें हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं।

यदि θ कोई न्यून कोण हो, तो

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

यह स्पष्ट है, कि यदि इन छः त्रिकोणमितीय अनुपातों में से कोई एक अनुपात ज्ञात हो, तो शेष सभी अनुपातों का परिकलन किया जा सकता है।

उदाहरण 16.5 : यदि $\sec \theta = 2$ हो, तो कोण θ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि, $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = 2, \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$

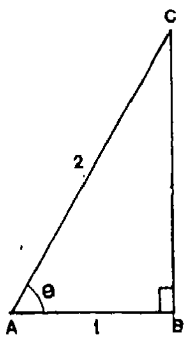
एक ऐसा समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिससे कि $\angle BAC = \theta$ और $\cos \theta = \frac{1}{2}$ हो। (आकृति 16.7)

$$\text{अब, } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$



आकृति 16.7

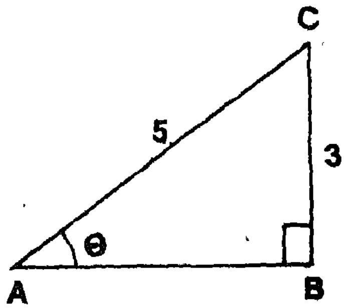
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण 16.6 : यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$, तो $\tan^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए। [$(\tan\theta)^2$ को $\tan^2\theta$ के रूप में लिखा जाता है। इसी प्रकार $\sin^3\theta$ का अर्थ है $(\sin\theta)^3$ आदि]

हल : $\sin\theta = \frac{3}{5}$ (दिया है)

एक ऐसा समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिससे कि $\angle BAC = \theta$, और $\sin\theta = \frac{3}{5}$ हो। (आकृति 16.8)

अब, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$
$= \sqrt{5^2 - 3^2}$
$= \sqrt{25 - 9}$
$= \sqrt{16}$
$= 4$



आकृति 16.8

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{3}{4}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{3}$

अब, $\tan^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cot\theta$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{3}$

$= \frac{2851}{1200}$

उदाहरण 16.7 : समकोण त्रिभुज ABC का कोण C समकोण है। यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ और $\tan B = \sqrt{3}$ हो, तो दिखाइए कि $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1$

हल : एक ऐसा समकोण त्रिभुज बनाइए जिससे कि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, और $\tan B = \sqrt{3}$,

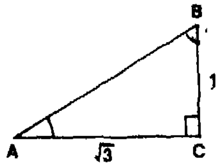
अब, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$
$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$
$= 2$

अतः $\sin A = \frac{1}{2}$, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

इसी त्रिभुज में,

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$\therefore \cos B = \frac{1}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$



आकृति 16.9

अब, $\sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

अतः, $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1$

प्रश्नावली 16.3

1. यदि $\operatorname{cosec} A = \sqrt{10}$ हो, तो शेष पांच त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. यदि $\cot \theta = \frac{21}{20}$ हो, तो $\cos \theta, \sin \theta$ ज्ञात कीजिए।
3. यदि $\sin A = \frac{1}{3}$ हो, तो $\cos A \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. यदि $\tan A = 2$ हो तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए :
   $\sec A \sin A + \tan^2 A - \operatorname{cosec} A$
5. यदि $\sin B = \frac{1}{2}$, तो दिखाइए कि
   $3 \cos B - 4 \cos^3 B = 0$
6. यदि $\tan A = 1$ हो, और $\tan B = \sqrt{3}$ हो, तो
   $\cos A \cos B - \sin A \sin B$
   का मान ज्ञात कीजिए।
7. यदि $\tan A = \sqrt{2} - 1$ हो, तो दिखाइए कि $\sin A \cos A = \frac{\sqrt{2}}{4}$
8. यदि $\operatorname{cosec} A = 2$ हो, तो $\frac{1}{\tan A} + \frac{\sin A}{1 + \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।
9. यदि $\sec \alpha = \frac{5}{4}$ हो, तो दिखाइए कि

$$\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sec\alpha}$$

10. दिखाइए कि $\tan^2 B - \sin^2 B = \sin^4 B \sec^2 B$

    जबकि $\cot B = \frac{12}{5}$ हो।

16.5 कुछ विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

हमने न्यून कोण α के लिए, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ इत्यादि की परिभाषा दी है, परन्तु हमने किसी विशेष कोण α के लिए $\sin\alpha$, आदि का मान ज्ञात नहीं किया है। हम कुछ कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए, अपने ज्यामितीय ज्ञान का प्रयोग कर सकते हैं। अन्य कोणों के लिए, हमें बनी बनाई सारणी का प्रयोग करना होगा।

30° के त्रिकोणमितीय अनुपात

आपको याद होगा कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है। इस त्रिभुज के एक कोण का समद्विभाजक, प्रत्येक भुजा के साथ 30° का कोण बनाता है।

मान लीजिए ΔABC, समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है (जिसका प्रत्येक कोण 60° का है।) मान लीजिए AD, BC पर लम्ब है (आकृति 16.10)।

क्योंकि ΔABC समबाहु त्रिभुज है, AD, कोण A का समद्विभाजक भी है, और D, BC का मध्य बिन्दु है।

और क्योंकि $BC = a$, इसलिए $DC = \frac{a}{2}$ और $\angle DAC = 30°$

ΔADC में, $\angle D$ समकोण है, कर्ण $AC = a$, और $DC = \frac{a}{2}$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$

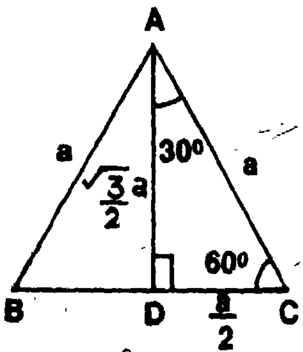
अतः $AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

अब, समकोण त्रिभुज ADC में, $\angle DAC = 30°$,

$$\therefore \sin 30° = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{DC}{AC} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos 30° = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{3}\,a/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}} = \frac{CD}{AD} = \frac{a/2}{\sqrt{3}a/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



आकृति 16.10

$$\text{cosec } 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2$$

$$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}$$

टिप्पणी : यदि किसी समकोण त्रिभुज में एक कोण 30° का हो तो उसकी सम्मुख भुजा कर्ण की आधी होती है।

60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

आकृति 16.10 को पुनः देखिए। ΔADC में $\angle DAC = 30°$, $\angle ADC = 90°$,

$\therefore \angle ACD = 60°$

अब, समकोण त्रिभुज ADC में $\angle ACD = 60°$

$$\therefore \sin 60° = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{3}\,a/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos 60° = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{DC}{AC} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan 60° = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}} = \frac{AD}{DC} = \frac{\sqrt{3}\,a/2}{a/2} = \sqrt{3}$$

$$\text{cosec } 60° = \frac{1}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60° = \frac{1}{\cos 60°} = 2$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\tan 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

45° के त्रिकोणमितीय अनुपात

यदि समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle C$ समकोण है और $\angle A = 45°$ हो, तो $\angle B = 45°$। इस प्रकार $\angle A = \angle B$, और इसलिए $BC = AC$

मान लीजिए, $BC = AC = a$, तो पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\therefore AB = \sqrt{2}a$

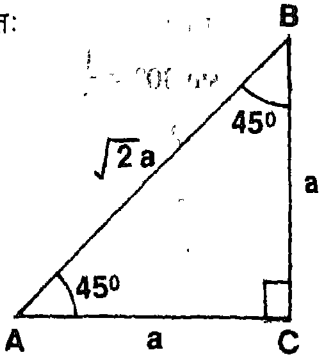
अब क्योंकि समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle A = 45°$, अत:

$$\sin 45° = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

इसलिए, $\text{cosec } 45° = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \sqrt{2}$, $\cot 45° = 1$



आकृति 16.11

0° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात

हमने $\sin\theta$ और $\cos\theta$, इत्यादि को प्रत्येक न्यून कोण θ जहां $0 < \theta < 90°$, के लिए परिभाषित किया है।

यदि $\theta = 0°$ या यदि $\theta = 90°$ हो, तो हम इनके लिए अलग से परिभाषा देते हैं:

(क) $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\tan 0° = 0$, $\sec 0° = 1$
(cosec 0° और cot 0° परिभाषित नहीं हैं)

(ख) $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\text{cosec } 90° = 1$ $\cot 90° = 0$
(sec 90° और tan 90° परिभाषित नहीं हैं)

आइए अब हम 0°, 30°, 45°, 60° और 90° के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को एक साथ एक सारणी के रूप में प्रस्तुत करें।

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\text{cosec }\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0°	0	1	0	परिभाषित नहीं	1	परिभाषित नहीं
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2	$1/\sqrt{3}$
90°	1	0	परिभाषित नहीं	1	परिभाषित नहीं	0

उदाहरण 16.8 : मान ज्ञात कीजिए :

$$2\sin^2 30° \tan 60° - 3\cos^2 60° \sec^2 30°$$

हल : क्योंकि

$\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\tan 60° = \sqrt{3}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ 2 \sin^2 30° \tan 60° - 3 \cos^2 60° \sec^2 30°$

$= 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 (\sqrt{3}) - 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= \frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{4} - 1$

$= \frac{\sqrt{3}-2}{4}$

उदाहरण 16.9 : सत्यापित कीजिए कि

$\sin 60° = 2 \sin 30° \cos 30°$

हल : वाम पक्ष $= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

दक्षिण पक्ष $= 2 \sin 30° \cos 30°$

$= 2\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अतः दी हुई समता सत्यापित हो जाती है।

प्रश्नावली 16.4

1. निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए :
   (क) $\operatorname{cosec}^2 30° \sin^2 45° - \sec^2 60°$
   (ख) $\sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$
   (ग) $\tan 30° \sec 45° + \tan 60° \sec 30°$
   (घ) $\cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°$
   (ङ) $\tan 60° \operatorname{cosec}^2 45° + \sec^2 30° \tan 45°$
2 निम्नलिखित में से प्रत्येक को सत्यापित कीजिए:
   (क) $\cos 60° = 1 - 2 \sin^2 30° = 2 \cos^2 30° - 1$

(ख) $\cos 90° = 1 - 2\sin^2 45° = 2\cos^2 45° - 1$

(ग) $\dfrac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \tan 30°} = \tan 30°$

(घ) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \sin 90°$

(ङ) $\cos 30° \cos 60° - \sin 30° \sin 60° = \cos 90°$

(च) $\dfrac{1 - \sin 60°}{\cos 60°} = \dfrac{1 - \tan 30°}{1 + \tan 30°}$

(छ) $\dfrac{\cos 30° + \sin 60°}{1 + \sin 30° + \cos 60°} = \cot 30°$

16.6 ऊंचाई और दूरी

इस अध्याय के प्रारम्भ में, हमने त्रिकोणमिति में हल किए जाने वाले मुख्य प्रश्न का वर्णन इन शब्दों में दिया था।

"यदि एक त्रिभुज के कुछ कोण और भुजाएं ज्ञात हों, तो शेष कोणों और भुजाओं को कैसे ज्ञात किया जाए"। अब हम इस प्रश्न को हल करने के लिए तैयार हैं यदि त्रिभुज समकोण है।

आइए एक उदाहरण से इसे प्रदर्शित करें।

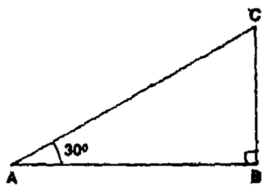
उदाहरण 16.10 : ΔABC में, $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$ और $AB = 5$ हो, तो BC ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए आँकड़ों से ΔABC बनाइए जैसा कि आकृति 16.12 में दिखाया गया है। हम जानते हैं कि

$$\tan A = \frac{BC}{AB}$$

अर्थात्, $\tan 30° = \dfrac{BC}{5}$

$$\therefore\ BC = 5 \tan 30° = 5.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



आकृति 16.12

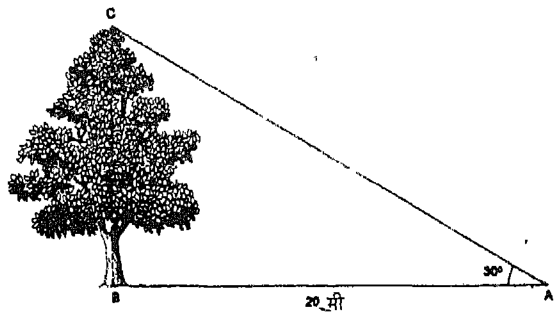
उन्नयन कोण (angle of elevation) और अवनमन कोण (angle of depression)

उदाहरण 16.10 में दिए गए प्रश्न जैसे अनेक प्रश्न हमारे वास्तविक जीवन से संबंधित होते हैं।

मान लीजिए हम एक पेड़ की ऊंचाई उसकी चोटी तक जाए बिना ज्ञात करना चाहते हैं। हम पेड़ के आधार बिन्दु B से कुछ दूरी, मान लीजिए 20 मीटर की दूरी पर बिन्दु A पर खड़े हो जाते हैं (आकृति 16.13)। मान लीजिए हम $\angle BAC$ को माप सकते हैं और मान लीजिए यह 30° है तो ठीक

उदाहरण 16.10 के हल के अनुसार, हम वृक्ष की ऊंचाई BC का परिकलन कर सकते हैं:

$$BC=\frac{20}{\sqrt{3}} = 11.5 \text{ मी (लगभग)}।$$



आकृति 16.13

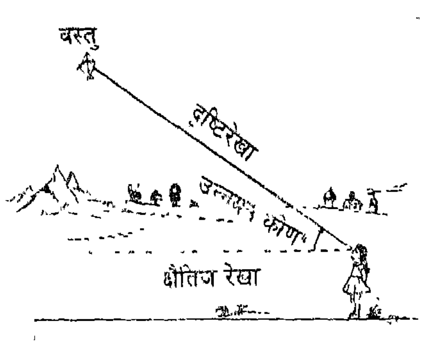
ध्यान दीजिए कि वृक्ष की ऊंचाई एक त्रिकोणमितीय अनुपात की सहायता से (बिना उसके मापे) ज्ञात की है।

जब कभी किसी अभियन्ता के सम्मुख नदी की चौड़ाई या पर्वत की ऊंचाई ज्ञात करने जैसी कोई समस्या आती है, (जिसे मापक टेप द्वारा मापना असम्भव या असुविधा जनक हो) तो वह प्रकृति में एक बड़ी त्रिभुज की कल्पना करता है, जिसकी एक भुजा, वह रेखा है जो नदी के एक ओर से दूसरी ओर तक हो, (या वह रेखा जो पर्वत की चोटी से भूमि तक लम्बवत् हो, इत्यादि) और इस त्रिभुज की कोई एक भुजा मापक टेप द्वारा आसानी से मापी जा सके, और उसका एक कोण, सैक्सटैण्ट या किसी अन्य सर्वेक्षण यन्त्र द्वारा मापा जा सके, तो एक भुजा और एक कोण के ज्ञात होने पर अभियन्ता त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से अज्ञात भुजा अर्थात् नदी की चौड़ाई या पर्वत की ऊंचाई मालूम कर सकता है।

अभियन्ता की प्रविधि को, उदाहरणों द्वारा प्रदर्शित करने से पूर्व हमें दो शब्दों को परिभाषित करना होगा।

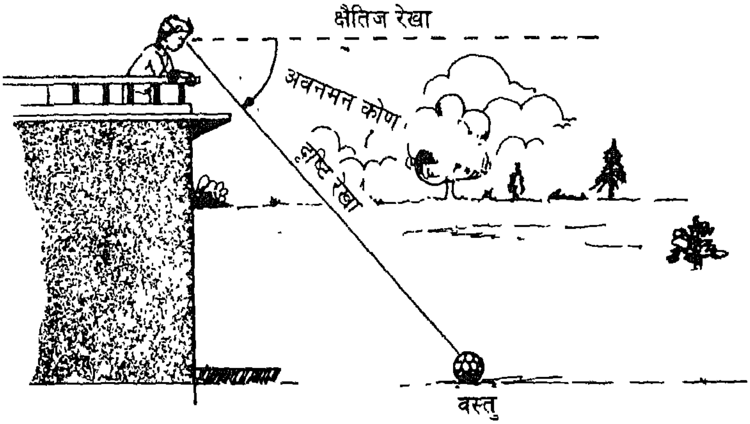
मान लीजिए, हम एक वस्तु को देख रहे हैं। दृष्टि-रेखा, वह सरल रेखा है जो हमारी आंख से वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ती है।

यदि वस्तु, आंख की क्षैतिज रेखा से ऊपर हो, (अर्थात् यदि वस्तु, आंख के स्तर से ऊपर हो) तो हमें वस्तु को देखने के लिए अपने सिर को ऊपर उठाना पड़ेगा। इस प्रक्रम में, हमारी दृष्टि एक कोण से घूम जाती है। इस कोण को, वस्तु का *उन्नयन कोण* (angle of elevation) कहते हैं (आकृति 16.14)।



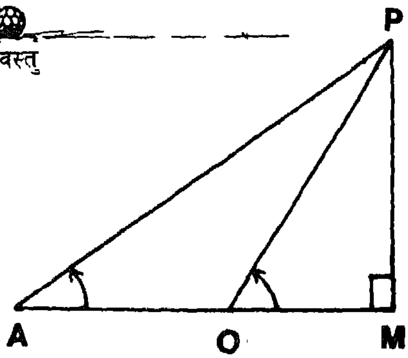
आकृति 16.14

यदि वस्तु, आंख की क्षैतिज रेखा से नीचे हो, (अर्थात्, यदि वह वस्तु आंख के स्तर से नीचे हो) तो हमें उस वस्तु को देखने के लिए अपना सिर नीचे की ओर झुकाना पड़ता है। इस प्रक्रम में, हमारी दृष्टि एक कोण से घूम जाती है। इस कोण को उस वस्तु का अवनमन कोण (angle of depression) कहते हैं (आकृति 16.15)।



आकृति 16.15

ध्यान दीजिए कि सामान्यतः किसी वस्तु के उन्नयन कोण (या अवनमन कोण), व्यापक में अलग-अलग बिन्दुओं पर अलग-अलग होता है। उदाहरण के लिए, आकृति 16.16 में, वस्तु P का बिन्दु O पर उन्नयन कोण, $\angle MOP$ है, और A पर $\angle MAP$ है, जो पहले से भिन्न है।



आकृति 16.16

उदाहरण 16.11 : एक मीनार भूमि पर ऊर्ध्वाधर खड़ा है। भूमि पर, मीनार के आधार से 15 मी दूरी पर स्थित एक बिन्दु से उसकी चोटी का उन्नयन कोण 60° है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए, P मीनार की चोटी है, और M उसका आधार बिन्दु है। मान लीजिए, भूमि पर, O वह बिन्दु है जहां P का उन्नयन कोण 60° है (आकृति 16.17)।

तो, $OM = 15$ मी, $\angle MOP = 60°$

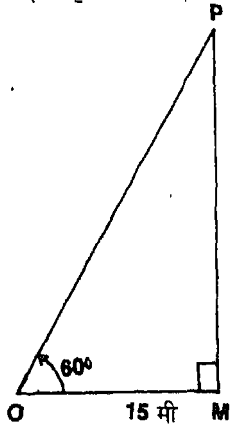
स्पष्टतः मीनार की ऊंचाई PM की लम्बाई है।

अब,

$$\tan \angle MOP = \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{15}$$

$$\therefore\ PM \text{ (मी में)} = 15 \tan \angle MOP$$
$$= 15 \tan 60°$$
$$= 15\sqrt{3}$$
$$= 26 \text{ (लगभग)}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 26 मी (लगभग) है।



आकृति 16.17

उदाहरण 16.12 : एक लम्बा वृक्ष, नदी के एक किनारे पर ऊर्ध्वाधर खड़ा है। दूसरे किनारे पर, वृक्ष के ठीक सम्मुख स्थित एक बिन्दु से, वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण 60° है। उसी किनारे पर, इस बिन्दु से 20 मी पीछे, स्थित एक बिन्दु से वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। वृक्ष की ऊंचाई और नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए, PM वृक्ष है, और h इसकी ऊंचाई है। मान लीजिए, दूसरे किनारे पर, वृक्ष के ठीक सम्मुख O बिन्दु है, जिससे कि OM ही नदी की चौड़ाई है। मान लीजिए, यह चौड़ाई d मी है।

मान लीजिए बिन्दु A, बिन्दु O से 20 मी पीछे है, तो आकृति 16.18 में $PM = h$ मी, $OM = d$ मी, $AO = 20$ मी

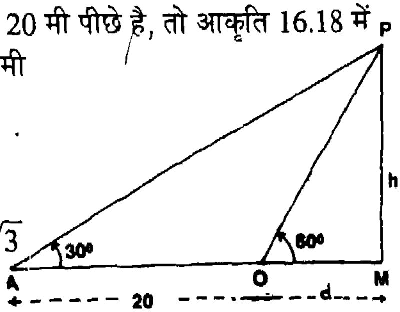
$\angle MOP = 60°$, $\angle MAP = 30°$

इसलिए $\tan 60° = \dfrac{h}{d}$

$$\therefore\ \frac{h}{d} = \sqrt{3} \text{ या } h = d\sqrt{3}$$

और,

$$\tan 30° = \frac{h}{d+20}$$



आकृति 16.18

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{d+20}$$

अर्थात्, $h = \dfrac{d+20}{\sqrt{3}}$

इस तरह $d\sqrt{3} = = \dfrac{d+20}{\sqrt{3}}$

या $3d = d+20$

$\therefore$ $d = 10$

और $h = d\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$= 10 \times 1.732 = 17.32$

अत: नदी की चौड़ाई $= d$ मी

$= 10$ मी

वृक्ष की ऊँचाई $= h$ मी

$= 17.32$ मी (लगभग)

उदाहरण 16.13 : एक प्रकाश स्तम्भ को 100 मी ऊंची चोटी से देखने पर, इसकी ओर आ रहे दो जहाज़ों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° है। यदि एक जहाज़, ठीक दूसरे के पीछे हो, तो दोनों जहाज़ों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए TM प्रकाश स्तम्भ है। A, B दो जहाज़ हैं और TN क्षैतिज रेखा है जो T से होकर जाती है। तब A और B के अवनमन कोण क्रमशः $\angle NTA$ और $\angle NTB$ हैं। अतः ये कोण क्रमशः 45° और 30° हैं।

अत: $\angle MAT = 45°$ और $\angle MBT = 30°$

क्योंकि

$$\tan \angle MAT = \frac{MT}{MA} = \frac{100 \text{ मी}}{MA}$$

$$MA = \frac{100 \text{ मी}}{\tan \angle MAT} = \frac{100 \text{ मी}}{\tan 45°} = \frac{100 \text{ मी}}{1} = 100 \text{ मी}$$

इसी प्रकार,

$$\tan \angle MBT = \frac{MT}{MB} = \frac{100 \text{ मी}}{MB}$$

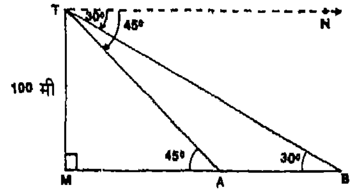
$$MB = \frac{100 \text{ मी}}{\tan \angle MBT} = \frac{100 \text{ मी}}{\tan 30°} = 100\sqrt{3} \text{ मी}$$

अतः $AB = MB - MA = 100\sqrt{3}$ मी $- 100$ मी

$= (100\sqrt{3} - 100)$ मी

$= 100 \times 0.73$ मी

$= 73$ मी (लगभग)



आकृति 16.19

प्रश्नावली 16.6

(परिकलन के लिए मान लीजिए, $\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$)

1. एक मीनार के आधार से 20 मी. दूर, भूमि पर, स्थित एक बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक सीढ़ी को एक दीवार पर लगाने पर उसका ऊपरी सिरा, दीवार की शिखर तक पहुंचता है। सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से 1.5 मी की दूरी पर है और सीढ़ी भूमि के साथ कोण 60° बनाता है। दीवार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक बिजली का खम्बा 10 मी ऊंचा है। खम्बे को सीधा लम्बवत रखने के लिए, एक स्टील की तार का एक सिरा, खम्बे की चोटी से बंधा है, और दूसरा, भूमि पर स्थिर किया गया है। यदि स्टील की तार, खम्बे के आधार बिन्दु से होकर जाने वाले क्षैतिज के साथ 45° का कोण बनाए, तो स्टील की तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
4. एक खम्बे के आधार बिन्दु से, पर्वत की चोटी का उन्नयन कोण 60° है, और पर्वत के आधार से खम्बे की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। यदि खम्बा 50 मी लंबा हो, तो पर्वत की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
5. एक सड़क, 50 मी ऊंचे मीनार के आधार तक, सीधे जाती है। मीनार की चोटी से सड़क पर खड़ी दो कारों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 60° हैं। दो कारों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए और बताइए कि प्रत्येक कार, मीनार के आधार से कितनी दूरी पर है?
6. दो भूमि केन्द्रों से मापने पर एक कृत्रिम उपग्रह के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 60° हैं। यदि केन्द्रों के बीच की दूरी 400 किमी हो, तो उपग्रह की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
7. भूमि पर एक बिन्दु P से, एक 10 मी ऊंचे भवन की चोटी और एक हैलीकोप्टर, जो भवन की चोटी के ठीक ऊपर कुछ ऊंचाई पर जा रहा है, के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 60° हैं। भूमि से हैलीकोप्टर की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
8. भूमि पर एक बिन्दु से, एक मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ओर 30 मी चलने के पश्चात्, मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 60° हो जाता है। मीनार की ऊंचाई क्या है?

9. एक 100 मी चौड़ी नदी के मध्य में, एक छोटा टापू है। इस टापू पर एक ऊँचा वृक्ष है। नदी के विपरीत किनारों पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि P, Q और वृक्ष एक रेखा में हैं। यदि P और Q से, वृक्ष की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 45° हों, तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
10. एक मीनार की चोटी से, एक 7 मी ऊंचे भवन के शिखर और आधार के अवनमन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
11. एक 100 मी. ऊंचे मीनार की चोटी और उसके आधार से, एक चट्टान की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। चट्टान की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
12. एक मीनार समतल-भूमि पर खड़ा है। सूर्य के उन्नतांश (altitude) (सूर्य का उन्नयनकोण) 30° पर मीनार की छाया सूर्य के उन्नतांश 60° पर मीनार की छाया से 45 मी अधिक होती हैं। मीनार की ऊंचाई मालूम कीजिए।

अध्याय 17

अभिकलन

17.1 भूमिका

आजकल कम्प्यूटर के बारे में हमें बहुत कुछ सुनने को मिलता है। भारतीय रेल प्रशासन ने दिल्ली में जनता द्वारा यात्रा आरक्षण के लिए कम्प्यूटरों का प्रवेश कर दिया है। वे इस सुविधा को, अन्य स्थानों पर भी, उत्तरोत्तर प्रवेश करने जा रहे हैं। बड़े संगठन जैसे भारतीय जीवन बीमा निगम, आदि, अपने कार्यों में कम्प्यूटरों का प्रयोग कर रहे हैं। कई परीक्षा परिषद् और विश्वविद्यालय भी अपने परीक्षा परिणामों को तैयार करने में कम्प्यूटरों का प्रयोग करते हैं। व्यापक रूप में, कृत्रिम उपग्रहों को आकाश (space) में छोड़ने और विशेष रूप में चन्द्रमा पर मनुष्य को भेजने में, उड़ान के नियन्त्रण के लिए, कम्प्यूटरों का अधिक प्रयोग होता है। इस प्रकार, कम्प्यूटर मानव जीवन के प्राय: प्रत्येक कार्यकलाप को प्रभावित कर रहे हैं। नि:सन्देह कम्प्यूटर का आविष्कार वर्तमान शताब्दी की महानतम उपलब्धियों में से एक है। इस लिए प्रत्येक नागरिक को यह जानकारी रखना आवश्यक है कि कम्प्यूटर क्या है। वे कैसे काम करते हैं। और उनका प्रयोग हम क्यों करें।

17.2 गणित और कम्प्यूटर

सम्भव है, आप विस्मय से पूछ बैठें कि कम्प्यूटर का गणित से क्या सम्बन्ध है। इसके उत्तर में, हम आप का ध्यान इस तथ्य की ओर दिला दें कि कम्प्यूटर के विकास में जिन तीन व्यक्तियों का अधिक योगदान माना जाता है वे तीनों ही गणितज्ञ थे। ये गणितज्ञ हैं: *चार्ल्स बाबेज* (Charles Babbage) (1791-1871), *एलान ट्यूरिंग* (Alan Turing) (1912-1954) और *जोन वोन न्यूमान* (John Von Neumann) (1903-1957)। बाबेज कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय में उसी पद पर नियुक्त थे जिसे उनसे पहले कभी महान् न्यूटन ने सुशोभित किया था। वे सभी विचार, जिन्हें बाबेज, अपनी मशीन में समावेश करना चाहते थे, आज के कम्प्यूटर में उपस्थित हैं। इस प्रकार, बाबेज को, वास्तव में, कम्प्यूटर-पिता कहा जा सकता है। *ट्यूरिंग* एक ब्रिटेन निवासी तथा तर्क गणितज्ञ थे जिन्होंने गणित में अभिकलन के क्षेत्र में, बड़ा ही मौलिक कार्य किया। वर्तमान कम्प्यूटर की वास्तुकला ठीक वही है, जिस की अभिकल्पना *वोन न्यूमान* ने की थी। इसी कारण इसे न्यूमान मशीन भी कहते हैं। केवल इतना

अन्तर है कि आज के कम्प्यूटर अपनी संग्रह करने की सामर्थ्य और अपनी कार्य करने की गति में अतिशय रूप में वृद्धि कर गए हैं।

कम्प्यूटर के इतिहास से ज्ञात होता है कि बाबेज से पूर्व भी गणितज्ञों की, शीघ्र परिकलन के लिए, मशीन बनाने में अभिरुचि रही थी। एक फ्रांसीसी गणितज्ञ *ब्लेज पास्कल* (Blaise Pascal) के पिता एक कर-संग्राहक (tax collector) थे। अपने पिता की सहायता के लिए उन्होंने 1642 में, एक मशीन बनाई जो योग और व्यवकलन की संक्रियाएं कर सकती थी। फिर लगभग 1674 में, *गोट्फ्रैड लाइब्निज* (Gottfried Leibnitz) [जो कि कलन (calculus) के स्वतन्त्र आविष्कारक भी थे] ने एक बहु-उद्देश्यीय मशीन बनाई जो योग, व्यवकलन, गुणन, विभाजन और वर्गमूल ज्ञात करना जैसी सभी संक्रियाएं कर सकती थी। इन मशीनों को इनके पश्चात् आने वाले केलकुलेटरों (calculators) तथा आज के कम्प्यूटरों के पूर्वज कह सकते हैं।

गणित में कम्प्यूटरों का सीधा प्रयोग हुआ है। कम्प्यूटर के प्रयोग द्वारा ज्यामिति के कुछ प्रमेय सिद्ध किये गए हैं। ज्यामिति के बिन्दुओं और रेखाओं को संख्याओं द्वारा प्रकट करते हैं और फिर इन संख्याओं पर अभिकलन कर प्रमेय सिद्ध करते हैं। गणित की एक प्रसिद्ध समस्या, जिसे *चतुर्वर्ण समस्या* (four-colour problem) के नाम से जाना जाता है, बहुत समय से हल नहीं हुई थी। कम्प्यूटर की सहायता से 1975 में इसे हल कर लिया गया है।

अब आप समझ सकते हैं कि मौलिकता की दृष्टि से, कम्प्यूटर, गणित और गणितज्ञों का शिशु है। इसलिए यह अध्ययन करना बड़ा रोचक होगा कि किस प्रकार गणित और यथार्थ में *गणित की विचार विधि, कम्प्यूटर विज्ञान* में अपनी भूमिका निभाती है।

17.3 कम्प्यूटर की कार्यप्रणाली

कम्प्यूटर एक इलेक्ट्रानिक यन्त्र है। हम कुछ इलेक्ट्रोनिक यन्त्रों को जानते हैं; जैसे ट्रांजिस्टर रेडियो और टेलीविजन। सम्भव है आपने कुछ इलेक्ट्रानिक खिलौने भी देखे होंगे।

कम्प्यूटर, जैसा कि इसके नाम से विदित होता है अभिकलन अर्थात् परिकलन (calculations) करता है। यहां अभिकलन का प्रयोग व्यापक रूप में करना है। यह सभी जानते हैं कि अभिकलन में, योग, व्यवकलन, गुणन, विभाजन और वर्गमूल ज्ञात करना, जैसी सभी संक्रियाएं सम्मिलित होती हैं। जब भी हमारी समस्या एक दिए हुए छोटे या बड़े व्यंजक का मान ज्ञात करने की हो, जैसे कि:

$$\frac{(19)^3 + 43 \times 12 - 66 \div 3}{1002 + \sqrt{625} \times (12)^2 \div 60}$$

तो हमें ऐसे ही अभिकलन करने होते हैं।

अवश्य ही, इसका मान ज्ञात करने के लिए अभिकलन करना होगा जो एक संख्यात्मक अभिकलन है अर्थात् केवल संख्याओं से सम्बद्ध अभिकलन। अब मान लीजिए, हमारे पास 1000 नगरों के नामों की

एक सूची है। हम इन्हें छाँट कर वर्णमाला के अनुसार क्रमबद्ध करना चाहते हैं। क्या इस कार्य में अभिकलन करना आवश्यक होगा। साधारणतया लोग कहेंगे नहीं। अवश्य ही, कम्प्यूटर इस कार्य को कर सकता है। कम्प्यूटर बाईं से दाईं ओर दो नामों के अक्षरों की तुलना करेगा और यह निश्चय करेगा कि कौन सा नाम पहले आएगा और कौन सा उसके पश्चात्। इस कार्य को "अ-संख्यात्मक अभिकलन" (non-numeric computation) कहते हैं।

हम कोई संख्यात्मक व असंख्यात्मक अभिकलन, कम्प्यूटर द्वारा कैसे कराएं? कम्प्यूटर की महत्वपूण विशेषताएं हैं कि वे अनुदेशों का पालन बड़ी कर्तव्य-परायणता से करते हैं। वे एकाकी लम्बे और बार-बार दुहराने वाले कार्य से नहीं थकते और वे बड़े तीव्र गति वाले हैं। आपको शायद यह जानकर आश्चर्य होगा कि वर्तमान कम्प्यूटर प्रति सेकण्ड दस लाख योग संक्रियाएं कर सकता है। परन्तु किसी को यह भ्रम नहीं होना चाहिए कि कम्प्यूटर द्वारा किसी समस्या का हल प्राप्त करने के लिए, बस इतना करना होगा कि बोलकर अथवा लिखकर समस्या को कम्प्यूटर के किसी भाग में रख दें, कुछ बटन दबाएं और कुछ चाबियां घुमाएं और कम्प्यूटर में से हल निकलने की प्रतीक्षा करें। अपने साधारण जीवन में, हम समस्या को सम्बन्धित विशेषज्ञों को दे देते हैं और उससे हल की प्रतीक्षा करते हैं। मशीन जिसे हम कम्प्यूटर कहते हैं इस प्रकार का विशेषज्ञ नहीं है। जो व्यक्ति, कम्प्यूटर की कर्तव्य परायणता, अथक होना और तीव्रता का लाभ उठाना चाहते हैं और उनका प्रयोग अपनी समस्या को हल करने के लिए करना चाहते हैं, उन्हें स्वयं ही, कम्प्यूटर को यथोचित रूप में, समस्या हल करने की विधि भी बतानी होगी। इसी तथ्य को हम यह कह कर प्रकट करते हैं कि हमें कम्प्यूटर को, समस्या हल करने के लिए, *क्रमादेश* (program) बनाना होगा।

अब ध्यान देने योग्य प्रश्न यह है कि किसी कम्प्यूटर को एक दी हुई समस्या का हल करने के लिए क्रमादेश कैसे किया जाय? इस प्रश्न का उत्तर पाने के लिए हमें यह देखना होगा कि मनुष्य किसी समस्या, चाहे वह छोटी व बड़ी, सरल व कठिन हो, का कैसे हल करता हैं। अपने सम्मुख किसी समस्या को पाकर (आवश्यक नहीं कि वह गणित सम्बन्धी हो) एक मनुष्य इसे कैसे हल करने का प्रयत्न करता है। समस्या हल करने के इस दृष्टिकोण का हम कुछ उदाहरणों द्वारा अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 17.1 : निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$$23 - 123 + 6 \times 49 - 12 \div 4 - (-10)$$

हल : यह प्रश्न बड़ा सरल है और आपने ऐसे बहुत से प्रश्नों का हल निकाला है। ऐसे प्रश्नों को हल करने के अपने अनुभव और अभ्यास के कारण, आप इस प्रश्न का हल तुरन्त कर लेंगे। परन्तु याद रखें, जब हमारी प्रमुख रुचि यह जानने की है कि प्रश्न का हल करते समय हम किस प्रकार से सोचते हैं। हमें कौन सी संक्रियाएं करनी हैं और किस क्रम में, अर्थात् हमें किन-किन चरणों में संक्रियाएं करनी हैं जिससे कि अन्तिम उत्तर प्राप्त कर सकें। सम्भवतः आपकी प्रक्रिया चरणशः (step by step) इस प्रकार होंगी:

चरण 1 : दिए हुए व्यंजक के विभिन्न पदों को मालूम कीजिए। वे हैं:
$23, -123, 6 \times 49, -12 \div 4, -(-10)$

चरण 2 : पहले दो गुणनखण्डों वाले पद अर्थात् 6×49 लीजिए। इसका मान ज्ञात कीजिए। यह 294 है। व्यंजक में, इस दो गुणनखण्ड वाले पद के स्थान पर इस मान को रखने पर व्यंजक इस प्रकार हो जाएगा:
$23 - 123 + 294 - (12 \div 4) - (-10)$

चरण 3 : दूसरे दो गुणनखण्ड वाले पद अर्थात् $-(12 \div 4)$ का मान ज्ञात कीजिए। व्यंजक में $-(12 \div 4)$ के स्थान पर इसका मान अर्थात् -3 रखने पर, व्यंजक इस प्रकार हो जाएगा:
$23 - 123 + 294 - 3 - (-10)$

चरण 4 : चिह्नों का उचित ध्यान रखते हुए, व्यंजक के सभी कोष्ठक खोल दीजिए। इस प्रकार व्यंजक हो जाएगा:
$23 - 123 + 294 - 3 + 10$

चरण 5 : धन चिह्न वाले सभी पदों अर्थात् 23, 294 और 10 का योग कीजिए। इनका योगफल 327 है। ध्यान दीजिए कि यह एक धनात्मक संख्या है।

चरण 6 : ऋण चिह्न वाले पदों अर्थात् -123, और -3 को जोड़िए। इनका योगफल -126 है। ध्यान दीजिए कि यह एक ऋणात्मक संख्या है।

चरण 7 : यदि धन चिह्नों वाले पदों का योगफल (अर्थात् चरण 5 में प्राप्त मान) ऋण चिह्न वाले पदों के योगफल (अर्थात् चरण 6 में प्राप्त मान) के निरपेक्ष मान (चिह्न रहित मान) से अधिक या बराबर हो, तो चरण 5 से प्राप्त मान में से चरण 6 में प्राप्त परिणाम के निरपेक्ष मान को घटाइए। अन्य स्थितियों में चरण 5 में प्राप्त मान को, चरण 6 में प्राप्त परिणाम के निरपेक्ष मान में से घटाइए, और प्राप्त अन्तर से पहले ऋण चिह्न लगा दीजिए। (हमारे उदाहरण में, ''यदि'' के बाद का पहला विकल्प लागू होता है। इसलिए इसका उत्तर $327 - 126 = 201$ होगा।)

इस प्रकार, उदाहरण 17.1 में दिये गये प्रश्न को हल करने के लिए हमें जो चरणशः विधि अपनानी होगी, उसका वर्णन हमने कर दिया है। इस प्रक्रिया में हमने प्रश्नों को हल करने में प्रयुक्त चरणों को एक क्रम में रखा है।

आइए अब एक व्यापक स्थिति पर विचार करें, जिसका उदाहरण 17.1 एक विशिष्ट स्थिति माना जा सकता है। मान लीजिए कि हम एक ऐसे व्यंजक का मान ज्ञात करना चाहते हैं, जिसमें दो-दो गुणन खण्डों वाले केवल दो पद हैं और शेष पद एक गुणन खण्ड वाले हैं। ध्यान दीजिए कि दो गुणनखण्डों वाले पद के गुणनखण्ड या तो "×" या "÷" से जुड़े होते हैं। उदाहरण 17.2 के प्रश्न पर विचार कीजिए।

उदाहरण 17.2 : निम्न व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए:

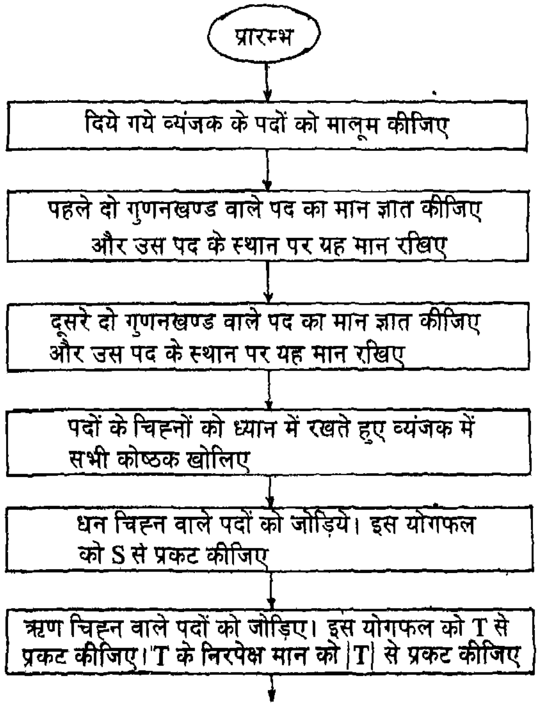
$$a \times b - (c) + d \div f + (-h)$$

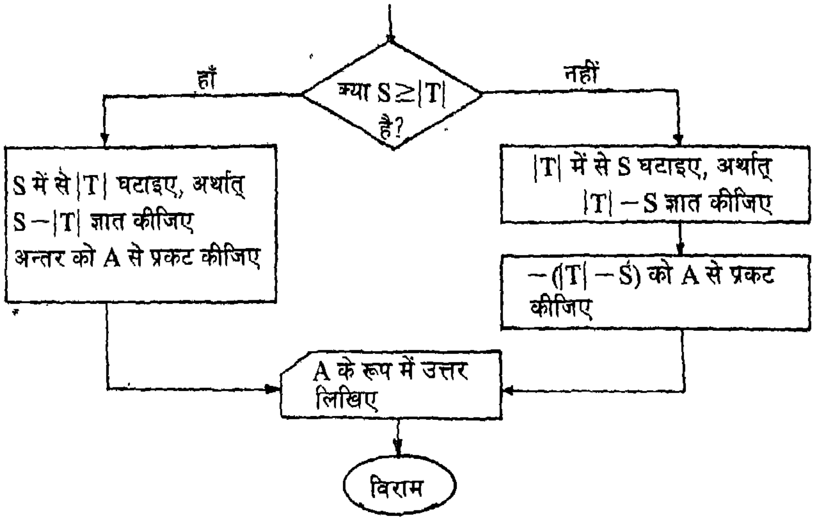
जहां a, b, c, d, f और h संख्याएं हैं और $f \neq 0$ है।

हल : इस व्यंजक का मान ज्ञात करने की विधि ठीक वही होगी जो हमने उदाहरण 17.1 में अपनायी है। केवल अंतर इतना है कि यहां संख्याओं के स्थान पर, प्रतीकों $a, b, c, \ldots$ इत्यादि का प्रयोग किया गया है। प्रक्रिया को चरणशः लिखने का प्रयत्न कीजिए।

चरणशः प्रक्रिया का वर्णन करने की हम एक वैकल्पिक विधि अपनायेंगे। हम इस चरणशः प्रक्रिया को एक आरेख (diagram) के रूप में प्रदर्शित करेंगे और आप देखेंगे कि यह एक उत्तम विधि है।

उदाहरण 17.1 और 17.2 के प्रश्नों को हल करने की चरणशः प्रक्रिया, आरेखी रूप में नीचे प्रदर्शित की गई है (आकृति 17.1):





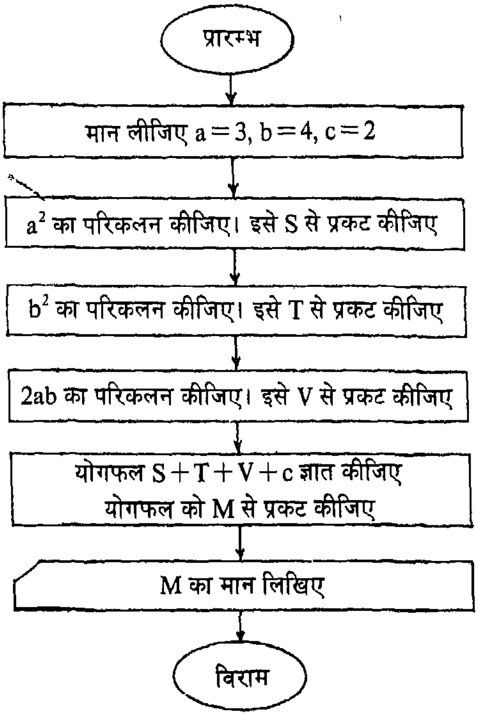
आकृति 17.1: उस व्यंजक का मान ज्ञात करने के लिए प्रवाह संचित्र (flow chart) जिसमें दो 2- गुणनखण्ड वाले पद और शेष एक गुणनखण्ड वाले पद हैं।

इस बात से अपने को सन्तुष्ट कर लीजिए कि वस्तुतः यह आरेख उदाहरण 17.2 को हल करने की चरणशः विधि को प्रदर्शित करता है कि नहीं। यह भी सम्भव है कि कुछ उदाहरणों में $S = 0$ अथवा $T = 0$ हो। इस प्रकार के कुछ उदाहरण दीजिए।

प्रश्नावली 17.1

1. उदाहरण 17.1 के आरेख का प्रयोग करके निम्नलिखित व्यंजकों का मान ज्ञात कीजिए:
   (क) $16 - (8 \times 5) + (60 \div 10) - (-10) + 1$
   (ख) $(-12) \div (-2) + 8 - (6 \times 10) - (-20)$
   (ग) $-(-18) + (2 \times 2) - (5 \times 7)$

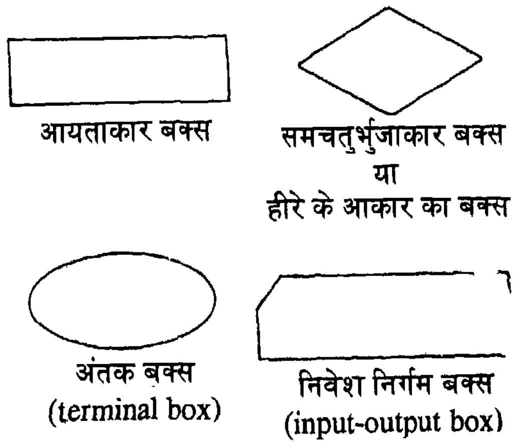
2. आकृति 17.2 के आरेख के अनुसार परिकलन कीजिए:



आकृति 17.2 : $(a + b)^2 + c$ के चरणशः अभिकलन को प्रकट करने वाला आरेख।

17.4 प्रवाह-संचित्र

आकृति 17.1 और 17.2 में दिया गया चित्रीय निरूपण एक प्रश्न हल करने की विधि को प्रदर्शित करता है। ऐसे चित्रीय निरूपण को *प्रवाह-संचित्र* (flowchart) कहते हैं। इसमें विभिन्न प्रकार के कुछ बक्स होते हैं जिन्हें तीर-चिह्नों से जोड़ा जाता है। ऊपर के प्रवाह संचित्रों में हमने चार प्रकार के बक्सों का प्रयोग किया है। दी हुई आकृति 17.3 में, उन्हें नामों सहित एक स्थान पर दिखाया गया है।



आकृति 17.3 : प्रवाह संचित्र में प्रयुक्त बक्सों के नाम और उनके प्रकार

जब हम कोई प्रवाह संचित्र बनाते हैं तो प्रत्येक बक्स में कार्य निर्देश का उल्लेख होता है। बक्सों को जोड़ने वाली रेखा पर बने तीर का चिह्न यह प्रकट करता है कि हमें शब्द ''प्रारम्भ'' वाले बक्स से शुरू करके किस प्रवाह अथवा दिशा में चलना है। अतः इस चित्रीय प्रदर्शन को प्रवाह-संचित्र कहते हैं। यदि हम तीरों से दिखाई गई दिशा में चलते रहें तो हम उस बक्स पर पहुँच जाएँगे जहाँ उत्तर प्राप्त हो जाता है। अन्त में एक अन्य अंतक बक्स (terminal box) आता है जिसमें विराम लिखा होता है। इस बक्स से यह संकेत मिलता है कि हम अभिकलन के अन्तिम चरण पर पहुँच गये हैं।

प्रवाह संचित्र के अनुसार कार्य सम्पन्न करने पर जो उत्तर प्राप्त होता है उसे उस कार्य का निर्गम (output) कह सकते हैं। इस उत्तर को लिखने के लिए एक अन्य बक्स, *जिसे निवेश–निर्गम बक्स* (input-output box) कहते हैं, का प्रयोग किया जाता है।

आयताकार बक्स का प्रयोग ऐसे कार्य को संकेत करता है जिसके दो या दो से अधिक संभव परिणाम नहीं होते, बल्कि एक ही निश्चित परिणाम होता है।

समचतुर्भुजाकार (हीरे के आकार वाले) बक्स को निर्णय बक्स (decision box) भी कहते हैं। इसमें एक प्रश्न होता है जिसका उत्तर हाँ या नहीं में होता है। इस स्थान पर, प्रवाह संचित्र दो शाखाओं में बंट जाता है—एक 'हाँ' रेखा के साथ और दूसरी 'नहीं' रेखा के साथ। इस संबंध में आगे दिये गये प्रवाह संचित्रों का अध्ययन कीजिए।

17.5 समस्या हल करने के आधारभूत अनुदेश

उदाहरण 17.1 में, हमने एक संख्यात्मक व्यंजक का मान ज्ञात करने के प्रश्न पर विचार किया है। हमने इस प्रश्न को पहले इसलिये लिया क्योंकि हम गणित के अध्ययन में इस प्रकार के प्रश्नों से परिचित होते रहे हैं। हमने बहुत से अनेक पदों वाले व्यंजकों के मान ज्ञात किये हैं। सरलता के लिए हमने यहाँ ऐसा व्यंजक लिया जिसमें दो गुणनखण्डों वाले केवल दो पद थे क्योंकि उदाहरण 17.1 में व्यंजक के पदों की संख्या निश्चित थी, इसलिए प्रश्न हल करने की चरणशः विधि का वर्णन करते समय हमने प्रत्येक पद का मान भी ज्ञात किया। उदाहरण के लिए हमने वस्तुतः 6 और 49 का गुणनफल प्राप्त किया जो कि 294 था। उदाहरण 17.2 का प्रश्न उदाहरण 17.1 के प्रश्न का एक व्यापक रूप है। आकृति 17.1 के प्रवाह संचित्र में जिसमें प्रश्न हल करने की चरणशः विधि बतायी गई है, प्रत्येक चरण या कार्य करने का वर्णन किया है। प्रत्येक कार्य को एक पृथक् बक्स से दिखाया गया है। प्रत्येक बक्स में उल्लेखित कार्य को कार्य करने का एक अनुदेश (instruction) मान सकते हैं। इस प्रकार, आकृति 17.1 का प्रवाह संचित्र ऐसे अनुदेशों का एक संग्रह है जिनका प्रारंभिक अंकगणित के जानकार किसी भी विश्वसनीय और आज्ञाकारी व्यक्ति द्वारा पालन किए जाने पर प्रश्न का उत्तर प्राप्त कर सकता है। आप जानते हैं कि कम्प्यूटर विश्वसनीय और आज्ञाकारी होता है। यह कुछ आधारभूत अनुदेशों को प्राप्त करके उनका पालन करता है।

यद्यपि चरणशः प्रक्रिया लिखने और प्रवाह-संचित्र बनाने के लिए, हमने अंकगणित के एक सुपरिचित प्रश्न पर विचार किया, फिर भी हमें इसके द्वारा, प्रश्न हल करने की एक महत्वपूर्ण विधि प्राप्त हुई है। जब भी हम किसी प्रश्न को हल करने पर विचार करते हैं तब हम हल करने की प्रक्रिया को भिन्न-भिन्न चरणों में बांट देते हैं। जैसे, (i) प्रत्येक चरण में कोई न कोई कार्य होता है, (ii) यदि इन सभी कार्यों (चरणों) को एक दिए हुए क्रम में, एक के बाद एक करें, तो अन्त में हमें प्रश्न का उत्तर प्राप्त हो जाता है। किसी भी समस्या का हल करने के सम्बंध में यह सदैव आधारभूत (basic) संकल्पना होती है, चाहे वह गणित सम्बंधी समस्या हो या अन्य कोई।

दैनिक जीवन में, जब भी कोई समस्या हमारे सामने आती है, हम इसे हल करने की कोई सुव्यवस्थित प्रक्रिया ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं। सुव्यवस्थित प्रक्रिया में किए जाने वाले कार्यों का अनुक्रम (sequence) होता है। इन प्रक्रियाओं को उस व्यक्ति को दिया जाने वाला अनुदेश माना जा सकता है जिसके सामने हल करने के लिए ठीक ऐसी ही समस्या हो।

आइए अब हम दैनिक जीवन की कुछ समस्याओं पर विचार करें और प्रत्येक को हल करने के लिए एक चरणशः प्रक्रिया निर्धारित करने का प्रयत्न करें।

दैनिक जीवन से लिए गए उदाहरण

उदाहरण 17.3 : एक व्यक्ति नदी पार करना चाहता है। उसे तैरना नहीं आता और पास में कोई पुल नहीं है। परन्तु वह देखता है कि नदी के उस किनारे पर जिस पर वह है, दो बालक एक छोटी नाव में बैठे हैं। वह व्यक्ति उन बालकों से प्रार्थना करता है कि वे उसे, अपनी नाव में, नदी के दूसरे किनारे पर ले चलें। बालक उसे बताते हैं कि नाव केवल एक वयस्क को या दो बालकों को ले जा सकती है। उस व्यक्ति को दूसरे किनारे पर ले जाने की समस्या को कैसे हल करें?

हल : थोड़ा विचार करने पर आकृति 17.4 के चित्रों द्वारा बताई गई विधि के अनुसार कार्य करने पर आप इस समस्या को हल कर सकते हैं। इस विधि में अनेक चरण हैं। आकृति 17.4 का प्रत्येक चित्र एक चरण का वर्णन करता है। सभी चित्रों को उस क्रम में लेने से, जिसमें वे खींचे गए हैं, समस्या को हल करने की चरणशः प्रक्रिया प्राप्त होती है। हम इस प्रक्रिया को आकृति 17.5 के प्रवाह संचित्र से प्रदर्शित करते हैं।





(ii)

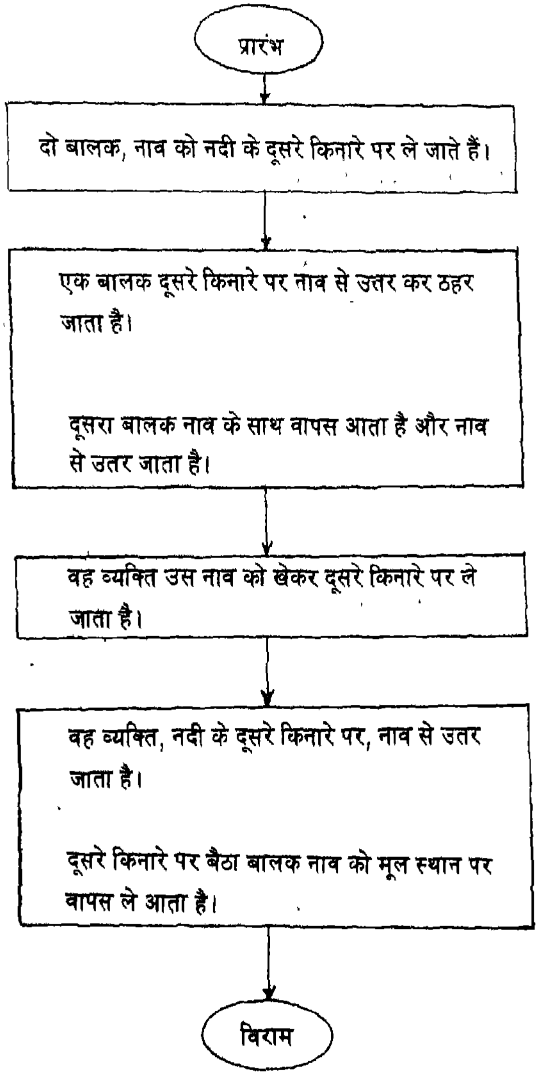


(iii)



(iv)

आकृति 17.4



आकृति 17.5 : उदाहरण 17.3 में दी हुई समस्या को हल करने के लिए प्रवाह-संचित्र

उदाहरण 17.4 : मान लीजिए दीवार पर, कुछ ऊँचाई पर, एक कैलेण्डर टंगा है। कैलेण्डर के अलग-अलग पृष्ठ पर अलग-अलग मास का उल्लेख है। किसी मास के अन्तिम दिन रात्रि में 9 बजे, हम उस मास के पृष्ठ को फाड़ना चाहते हैं और यह देखना चाहते हैं कि नया पृष्ठ अगले दिन आरम्भ होने

वाले नए मास को दिखाता है कि नहीं। इस कार्य को सम्पन्न करने के लिए एक चरणशः प्रक्रिया लिखिए।

हल : इस समस्या में, कार्यों या संक्रियाओं को निम्न दो सरल चरणों में व्यक्त कर सकते हैं:

(1) यदि आज मास का अन्तिम दिन है और समय रात्रि के 9 बजे हैं तो कैलेण्डर का वर्तमान मास का पृष्ठ फाड़ दीजिए।

(2) यह पुष्टि कर लीजिए कि अगला पृष्ठ अगले मास वाला ही पृष्ठ है।

ऐसा प्रतीत होता है कि इन दोनों चरणों को एक साथ लेने पर एक ऐसी चरणशः प्रक्रिया प्राप्त होती है जिसे करने से अभीष्ट लक्ष्य प्राप्त हो जाता है। इस प्रकार, समस्या का हल प्राप्त हो जाता है। परन्तु यह इस बात पर निर्भर करता है कि इन चरणों के अनुदेश किस व्यक्ति को दिए गये हैं। क्या वह व्यक्ति बहुत प्रतिभाशाली है, साधारण प्रतिभा वाला है, बहुत ही साधारण व्यक्ति है या एक मशीन है। हाँ, कई बार हमें मशीन को एक अनुदेश-अनुक्रम देना होता है, जिसका पालन करके मशीन अभीष्ट लक्ष्य प्राप्त कर सकती है। आपने ऐसी मशीनों के बारे में सुना होगा, इन्हें रोबोट (Robot) कहते हैं। एक रोबोट वास्तव में एक कम्प्यूटर ही होता है, जिसके हाथ पाँव जैसे कुछ अंग होते हैं और जिन्हें चलाया जा सकता है।

सम्भव है कि जिस व्यक्ति को अनुदेश दिए गए हैं उसको ध्यान में रखते हुए ऊपर उल्लेख की गई 2-चरण प्रक्रिया हमारे उद्देश्य के पूर्णतया उपयुक्त न हो। इसमें बहुत सी बातों की कल्पना पहले से की जा सकती है। सम्भव है कि प्रत्येक चरण पर्याप्त रूप में सरल न हो। हो सकता है कि बहुत से आवश्यक ब्यौरे विस्तृत रूप में देने पड़ें और केवल तभी अनुदेश लागू हो पाएँ। अतः हम इन दो चरणों के ब्यौरों पर विचार करें।

सबसे पहले कैलेण्डर से वर्तमान मास वाले पृष्ठ को फाड़ने के कार्य को लीजिए। हमें बताया गया है कि कैलेण्डर दीवार पर ऊँचाई पर स्थित है। इसलिए हमें एक स्टूल की आवश्यकता होगी जिससे कि उस पर खड़े होकर हमारा हाथ कैलेण्डर तक पहुँच सके। एक बार जब हम स्टूल पर खड़े हो जायें और हमारा हाथ कैलेण्डर तक पहुँच जाये, तो क्या हमें और कुछ निर्दिष्ट करना होगा? हमें यह देखना होगा कि कैलेण्डर का पहला पृष्ठ वर्तमान मास का है। तब हमें कैलेण्डर को एक हाथ से थाम कर और केवल तभी जबकि रात्रि के 9 बज चुके हों, उस पृष्ठ को फाड़ कर हटा देना चाहिए। इसलिए अकेले चरण 1 अर्थात् ''यदि आज मास का अन्तिम दिन है और रात्रि के 9 बज चुके हैं, तो कैलेण्डर का वर्तमान मास का पृष्ठ कैलेण्डर से फाड़ दीजिए'' को विस्तार से इस प्रकार प्रकट करेंगे:

1.1 दीवार के पास, एक पर्याप्त ऊँचाई का स्टूल रखिए जिससे कि कैलेण्डर तक पहुँचा जा सके।

1.2 स्टूल पर खड़े हो जाइए और कैलेण्डर की ओर देखिए।

1.3 यदि पहला पृष्ठ वर्तमान मास का हो, यदि आज मास का अन्तिम दिन हो और यदि अब रात्रि के 9 बज चुके हों, तो कैलेण्डर को एक हाथ से पकड़िए, वर्तमान मास के पृष्ठ को दूसरे हाथ

से पकड़िए और उसे कैलेण्डर से पूर्णतया फाड़ दीजिए।

इसी प्रकार, उपरोक्त 2-चरण प्रक्रिया के चरण 2 को विस्तार से इस प्रकार प्रकट सकते हैं:

2.1 यदि कैलेण्डर का पहला पृष्ठ अगले दिन आरम्भ होने वाले मास को नहीं दिखाता तो कैलेण्डर को दीवार से पूरा ही हटा दीजिए।

2.2 स्टूल से नीचे उतर आइए।

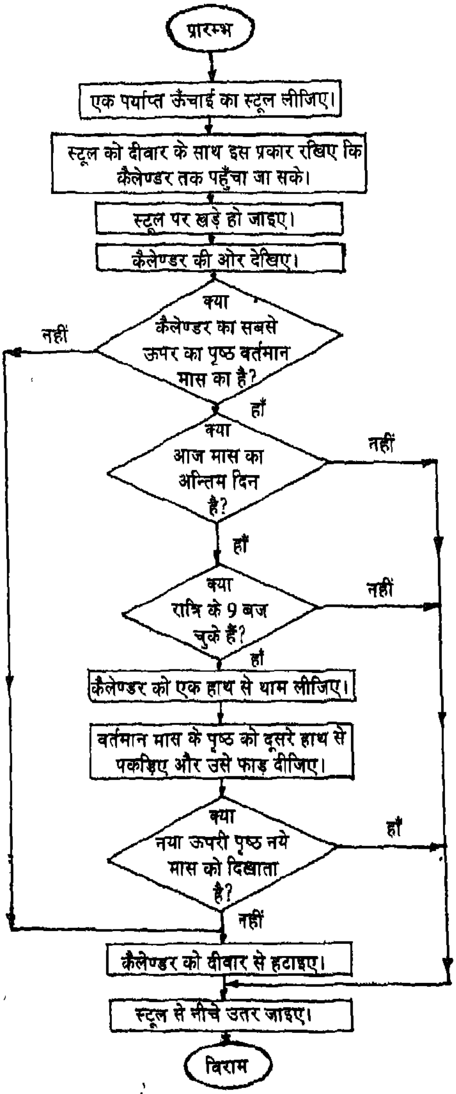
यदि हम ऐसा अनुभव करते हैं कि चरण 1.1-1.3 और 2.1-2.2 का कोई भी चरण उस व्यक्ति या रोबोट के लिए, जिसे अनुदेशों का पालन करना है, पूर्ण रूप से स्पष्ट नहीं है तो हमें उस चरण विशेष को और चरणों में बांट देना चाहिए या उसे और अधिक समझने योग्य बना देना चाहिए। उदाहरण 17.4 के लिए, मान लीजिए कि ये चरण पर्याप्त हैं और इस लिए कुल 5 चरणों के क्रम 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, से अपेक्षित चरणशः प्रक्रिया प्राप्त होती है। इस प्रक्रिया को प्रवाह संचित्र द्वारा प्रदर्शित करने पर आकृति 17.6 प्राप्त होगी जो कि पृष्ठ 366 पर है।

ध्यान दीजिए कि प्रवाह-संचित्र में *चरणों 1.1 और 1.2* में से प्रत्येक को दो भागों में बाँटा गया है। इसी प्रकार *चरण 1.3* को भी कई भागों में बांटा गया है। यही बात *चरण 2.1* पर भी लागू है। यह केवल सुविधा के लिए किया गया है। यह इसलिए नहीं किया गया है कि इससे ये चरण अधिक स्पष्ट व अधिक समझने योग्य बन जाएँ।

प्रश्नावली 17.2

1. आप अपने सहपाठी से दूरभाष (telephone) से बात करना चाहते हैं। उसका दूरभाष नम्बर 4 अंकों वाला है। अपने अभीष्ट कार्य को प्रवाह-संचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।
2. एक नव आगुन्तक को एक संग्रहालय पहुंचने के लिए निम्नलिखित अनुदेश दिये गए। संग्रहालय पहुंचने तक की उसकी क्रियाओं को प्रवाह संचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

   "दक्षिण की ओर तब तक चलिए जब तक कि अपनी बाईं ओर आपको एक पार्क न दिखाई देने लगे। पार्क क्षेत्र समाप्त होने पर दाईं ओर मुड़िए और तब तक चलिए जब तक कि आपके दाईं ओर एक झील न दिखाई दे। ज्यों ही, झील का क्षेत्र आरंभ हो, सड़क पार कीजिए और अपने दाईं ओर चलते जाइए। आपके बाईं ओर पहले मोड़ के कोने पर संग्रहालय है।"
3. 1000 रुपये पर, 6 वर्ष में, 12 प्रतिशत प्रतिवर्ष की दर से ब्याज ज्ञात करने के लिए एक चरणशः प्रक्रिया लिखिए। इसके लिए प्रवाह संचित्र भी बनाइए।



आकृति 17.6 : उदाहरण 17.4 की समस्या के लिए प्रवाह-संचित्र

17.6 कलन-विधि

पिछले उदाहरणों और प्रश्नावलियों में आपने अवश्य ही देखा होगा कि किसी समस्या को हल करने के लिए, हमें एक चरणश: प्रक्रिया बनानी होती है। चरणश: प्रक्रिया के लिए एक पारिभाषिक शब्द है : कलन-विधि (algorithm)। इस प्रकार, कलन-विधि वह विधि है जिसकी सहायता से समस्या का हल

निकाला जा सकता है। दूसरे शब्दों में, कलन-विधि चरणों का एक ऐसा अनुक्रम है जिसको निष्ठापूर्वक करने से कार्य सम्पन्न हो जाता है। नौवीं शताब्दी के एक गणितज्ञ अबू जफर मुहम्मद इब्न मूसा अल खुआरिजमी (Abu Jafar Muhammd Ibn Musa Al Khawarizmi) का कुल नाम था, अल-खुआरिजमी और इसी नाम से प्राप्त हुआ है शब्द "अलगारिथ्म (algorithm)"।

वास्तव में हम सभी अपने दैनिक जीवन में, ऐसे शब्दों से परिचित हैं जो कलन-विधि के स्थान पर प्रयुक्त होते हैं। एक नया व्यंजक बनाने के लिए उसकी "व्यंजन विधि" निर्दिष्ट होती है। व्यंजन विधि उस चरणशः प्रक्रिया का वर्णन करती है जिससे बताई गई सामग्री का प्रयोग कर, वह व्यंजन बनाया जा सके। इस प्रकार, पाक विज्ञान में कलन-विधि के स्थान पर व्यंजन विधि का प्रयोग होता है। स्वैटर बुनना सिखाने के लिए चरणशः अनुदेश जैसे "उल्टा एक सीधा एक" दिये जाते हैं। इनको एक साथ प्रयोग करने पर इस अनुदेश अनुक्रम को "बुनाई नमूना" कहते हैं। बुनाई नमूना एक कलन-विधि है। संगीत कला में आपने देखा होगा कि गायक मण्डली के प्रत्येक गायक के सम्मुख एक पट्टी पर μ के प्रकार के प्रतीकों का एक संग्रह होता है। इसे "संगीत संरचना" कहते हैं। संगीत संरचना भी एक कलन-विधि है। यदि आप बने बनाये ब्लाकों से एक हवाई जहाज का खिलौना बना रहे हैं, तो इसके लिए आपको एक दिए हुए क्रम में कुछ दिये हुए अनुदेशों का पालन करना होता है। इन्हें "संरचना अनुदेश" कहते हैं जो वास्तव में एक कलन-विधि ही है। इसी प्रकार, एक विशेष ड्रेस बनाने के लिए एक दर्जी को काटने और सीने के एक अनुदेश-अनुक्रम का पालन करना होता है और तभी वह ड्रैस बना पाता है। इस अनुदेश अनुक्रम को "ड्रैस पेटर्न" कहते हैं। ड्रैस पैटर्न भी एक कलन-विधि है। नीचे सारणी-1 में हमने ये सभी सूचनाएँ संक्षेप में प्रकट की हैं। बाईं ओर के स्तंभ में, उस कार्य का वर्णन है जिन्हें हमें करना है। प्रत्येक कार्य के दाईं ओर उस कार्य को सम्पन्न करने के लिए अभीष्ट कलन-विधि या चरणशः प्रक्रिया शब्द का प्रयोग किया गया है।

सारणी 1

कुछ साधारण कार्यों की कलन-विधि

कार्य	चरणशः प्रक्रिया अर्थात कलन-विधि का साधारण नाम
व्यंजन बनाना	व्यंजन विधि
स्वेटर बुनना	बुनाई नमूना
ड्रैस बनाना	ड्रैस पैटर्न
संगीत गायन	संगीत संरचना
खिलौना बनाना	संरचना अनुदेश

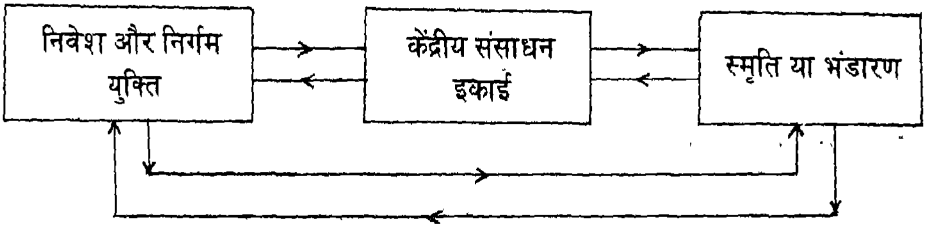
इस प्रकार, आप देख सकते हैं कि कलन-विधि की अभिकलपना जीवन के प्रत्येक क्षेत्र का एक महत्वपूर्ण कार्यकलाप है। कलन-विधि, वास्तव में समस्या को हल करने की एक योजना है। कलन-विधि को बनाने के लिए कुछ चिन्तन प्रक्रिया करनी होती है। इस प्रकार कलन-विधि की रचना को सीखने के लिए हमें यह सीखना होगा कि हम सुव्यवस्थित ढंग से कैसे सोचें। कंप्यूटर के आगमन से इस कार्यकलाप ने बहुत अधिक महत्व और प्रतिष्ठा प्राप्त कर ली है।

गणित, कलन-विधि और कंप्यूटर

कलन-विधि की रचना करने और उसका अध्ययन करने के कार्य का गणित में एक अद्वितीय और केंद्रीय स्थान है। दो दिए हुए धन पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने के संबंध में युक्लिड की कलन-विधि (Euclid's Algorithm) से आप परिचित होंगे। गणित में प्रश्नों को हल करने के लिए आपने अन्य कई विधियाँ और प्रक्रियाएँ सीखी हैं। यथोचित कलन-विधि बनाने का यह कार्यकलाप गणितज्ञों ने प्राचीन काल से अपनाया है। आधुनिक युग में कंप्यूटर के प्रयोग में आने के कारण इस पर और अधिक बल दिया जाने लगा है। ऐसा होने का एक कारण यह है कि किसी व्यक्ति का कलन-विधि स्वयं समझ लेना ही पर्याप्त नहीं है, अब उसे इस कलन-विधि को एक यन्त्र को, जिसे कंप्यूटर कहते हैं, इस प्रकार बताना भी है कि वह उसे समझ सके और उसके अनुसार कार्य कर सके। कंप्यूटर केवल सरल संक्रियाएँ जैसे संख्याओं का योग, व्यवकलन, गुणन, भाजन व तुलना ही कर सकते हैं।

कंप्यूटर द्वारा सम्पन्न कराए जाने वाले अन्य कार्य को एक कलन-विधि की सहायता से आधारभूत संक्रियाओं के रूप में व्यक्त करना आवश्यक होता है।

कंप्यूटर के तीन प्रमुख भाग होते हैं। इन्हें आकृति 17.7 में दिखाया गया है।



आकृति 17.7 : एक प्रतिदर्श कंप्यूटर के प्रमुख भाग

चित्र में तीर के चिह्न सूचना और विद्युत संकेतों के प्रवाह को दिखाते हैं।

कंप्यूटर की केंद्रीय संसाधन इकाई (Central Processing Unit) (CPU) उपरोक्त मौलिक संक्रियाओं को पूरा करती है। कंप्यूटर की स्मृति (memory) में दो प्रकार की वस्तुएँ होती हैं।

(i) की जाने वाली संक्रियाओं से संबद्ध कलन-विधि।

(ii) सूचनाएँ व आंकड़े जिन पर ये संक्रियाएँ करनी हैं और इन संक्रियाओं से प्राप्त परिणाम।

निवेश युक्तियाँ (input devices) वे साधन हैं जिनके प्रयोग से कलन विधि और आंकड़ों को कंप्यूटर में निविष्ट करते हैं। निर्गम युक्तियाँ (output devices) वे साधन हैं जिनके प्रयोग से अभिकलनों अर्थात कंप्यूटरिंग के परिणामों को उपयोगकर्ता तक पहुँचाया जाता है।

कंप्यूटर उन कार्यों को कर सकता है या उन समस्याओं को हल कर सकता है, जिनकी कलन-विधि को मौलिक संक्रियाओं के रूप में लिखा जा सके। कंप्यूटर ऐसी समस्या हल नहीं कर सकता जिसके लिए कलन-विधि न लिखी जा सके। यही कारण है कि यहाँ हम यह अध्ययन कर रहे हैं कि किस प्रकार किसी समस्या के लिए एक कलन-विधि लिखी जाती हैं। एक बार कलन विधि प्राप्त हो जाए तो हम बड़ी आसानी से उसका अनुवाद उन भाषाओं में कर सकते हैं, जिन्हें कंप्यूटर समझता है और स्वीकार करता है। आपने कुछ नाम अवश्य सुने होंगे, जैसे बेसिक (BASIC), फोर्ट्रान (FORTRAN), कोबोल (COBOL), और पास्कल (PASCAL)। ये उन भाषाओं में से कुछ हैं जिनका प्रयोग, कंप्यूटर के साथ कार्य करते समय हम करते हैं। उस कलन-विधि को, जो इन भाषाओं में से किसी एक में लिखा हो, एक क्रमादेश (program) कहते हैं। कलन-विधि को एक क्रमादेश के रूप में लिखना एक सीधा एवं सरल कूटलेखन (coding) कार्यकलाप है। कलन-विधि लिखना एक मौलिक कार्य है जिसके लिए सुव्यवस्थित ढंग से सोचना पड़ता है और इसीलिए इसका गणित से निकट का संबंध है और यह गणितज्ञों को अधिक प्रिय है। इसीलिए गणित के अध्ययन में, हम कलन-विधि के विकास पर जोर दे रहे हैं और इस ओर ध्यान केंद्रित कर रहे हैं।

कंप्यूटर बड़े और छोटे सभी प्रकार के होते हैं। कोई कंप्यूटर कितना बड़ा है, यह निश्चय करने की एक कसौटी है उसकी स्मृति का आमाप (memory size) या उसकी भंडारण (storage) क्षमता। भिन्न-भिन्न कंप्यूटरों की चाल (speed) भी भिन्न-भिन्न होती है।

कई प्रकार के निवेश और निर्गम साधनों को कंप्यूटर से जोड़ा जा सकता है। आप यह सभी विवरण किसी कंप्यूटर केंद्र में जाकर या कंप्यूटर निर्माता (कम्पनी) के विक्रय विज्ञापन पत्र से प्राप्त कर सकते हैं। गणित में, हमारी प्रधान अभिरुचि यह सीखना है कि हम कलन-विधि कैसे विकसित करें।

कलन-विधि का चरणशः शोधन

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं, कंप्यूटर बड़ा ही आज्ञाकारी यंत्र है। आप इसे जैसा करने का निर्देश देंगे, वह ठीक वैसा ही करता है। अतः कलन-विधि का प्रत्येक चरण निश्चित और स्पष्ट होना चाहिए। उदाहरण 17.4 में हमने देखा है कि किसी बुद्धिमान व्यक्ति के लिए तो चरण 1 और 2 ठीक थे, परन्तु दूसरों के लिए उन्हें अधिक विस्तृत करना या शुद्ध करना आवश्यक था। चरण 1 को तीन उपचरणों 1.1, 1.2, और 1.3 में शोधित किया गया और चरण 2 को दो उपचरणों 2.1 और 2.2 में। हमें कलन-विधि को इसी प्रकार विकसित करना चाहिए। हम एक ही बार में किसी कार्य के सम्पूर्ण ब्यौरे पर ध्यान केंद्रित नहीं कर सकते। अतः, इस प्रकार का क्रमबद्ध शोधन आवश्यक हो जाता है। कलन-विधि का शोधन कार्य तब तक करते रहते हैं जब तक कि इसका प्रत्येक चरण पर्याप्त रूप से विस्तृत, स्पष्ट और निश्चित

न हो जाए। कलन-विधि के विकास की इस रीति को "चरणश: शोधन" (stepwise refinement) या "*ऊपर से नीचे की ओर की योजना*" (top-down design) या "*खंडन और प्राप्ति नीति*" (divide and conquer strategy) कहते हैं। हम एक अन्य उदाहरण लेकर इस रीति की व्याख्या करेंगे और इसे प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 17.5 : एक प्याला चाय बनाने की कलन-विधि विकसित कीजिए।

हल : हम अपने अनुभव से यह कह सकते हैं कि कलन-विधि में निम्नलिखित पाँच चरण होंगे :

(1) पानी उबालिए।
(2) उबलते पानी में चीनी मिलाइए।
(3) उबलते पानी में चाय मिलाइए।
(4) मिश्रण को एक प्याले में छानिए।
(5) प्याले में दूध मिलाइए।

ऊपर के चरण शायद पर्याप्त रूप से इतने विस्तृत नहीं हैं कि उन्हें एक रोबोट समझ सके और उनका पालन कर सके। हम इनमें से प्रत्येक चरण को कुछ सरल उपचरणों में बांट कर शोधित करेंगे। प्रत्येक उपचरण में मूल चरण की अपेक्षा अधिक ब्यौरे होंगे।

चरण (1)–'पानी उबालिए',–को निम्न उपचरणों में शोधित कर सकते हैं :

(1.1) एक प्याला पानी लीजिए।
(1.2) पानी को एक खाली बर्तन में डालिए।
(1.3) अंगीठी जलाइए।
(1.4) बर्तन को अंगीठी पर रखिए।
(1.5) पानी उबलने तक प्रतीक्षा कीजिए।

चरण (2)–'उबलते पानी में चीनी मिलाइए'–को निम्न उपचरणों में शोधित कर सकते हैं :

(2.1) चीनी का डिब्बा खोलिए।
(2.2) एक चम्मच चीनी लीजिए।
(2.3) अंगीठी पर रखे उबलते पानी में एक चम्मच चीनी डालिए।
(2.4) चीनी का डिब्बा बन्द कीजिए।

इसी प्रकार,

चरण (3)–'उबलते पानी में चाय मिलाइए'–को निम्न उपचरणों में शोधित कर सकते हैं :

(3.1) चाय का डिब्बा खोलिए।
(3.2) एक चम्मच चाय लीजिए।
(3.3) अंगीठी पर उबलते पानी में एक चम्मच चाय डाल दीजिए।
(3.4) चाय का डिब्बा बंद कीजिए।

चरण (4) 'मिश्रण को एक प्याले में छानिए'—को इस प्रकार शोधित कर सकते हैं :

(4.1) अंगीठी बुझाइए।

(4.2) मिश्रण को एक प्याले में छानिए।

चरण (5)—'प्याले में दूध मिलाइए'—को इस प्रकार शोधित कर सकते हैं :

(5.1) प्याले में दूध तब तक मिलाइए जब तक कि मिश्रण का काला रंग हल्के भूरे रंग में न बदल जाए।

ध्यान दीजिए कि किसी चरण को शोधित करने के लिए यह आवश्यक नहीं है कि चरणों की संख्या बढ़ाई जाए। यह चरण (5) में देख सकते हैं। महत्वपूर्ण बात यह है कि शोधित नया चरण (5) अधिक स्पष्ट और सरल हो या उसमें कार्य के अधिक ब्यौरे दिये हुए हों। शोधन में एक अतिरिक्त परन्तु स्पष्ट क्रिया भी हो सकती है। यह क्रिया हमने चरण (4) में की है। उपचरण (4.1) एक ऐसी स्पष्ट क्रिया है जिसे उपचरण (4.2) को करने से पहले अवश्य ही करते हैं। अतः इसे चरण (4) के शोधन में सम्मिलित कर लिया गया है। इस प्रकार किसी चरण के शोधन की प्रक्रिया में निम्न बातें संबद्ध होंगी :

(क) क्रिया के वर्तमान चरण को छोटे और सरल क्रियाओं के चरणों में बांटना

(ख) क्रिया के वर्तमान चरण को अधिक स्पष्टता के साथ दुबारा व्यक्त करना या

(ग) उपचरणों के रूप में और अधिक ब्यौरे देना। इसी को दृष्टिगत रखते हुए, चरण (2.1) 'चीनी का डिब्बा खोलिए' का इस प्रकार शोधन करना आवश्यक है :

(2.1.1) अलमारी से चीनी का डिब्बा लाइए।

(2.1.2) इसका ढक्कन खोलिए।

इसी प्रकार, चरण (2.4) 'चीनी का डिब्बा बंद कीजिए', को भी शायद इस प्रकार शोधित करना आवश्यक है :

(2.4.1) चीनी के डिब्बे पर ढक्कन रखिए।

(2.4.2) चीनी का डिब्बा वापस अलमारी में रखिए।

अपने इस सोच-विचार को ध्यान में रखते हुए और सभी शोधनों को इकट्ठा कर, हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

प्रारम्भिक कलन-विधि	*पहले शोधन के बाद कलन-विधि*		*दूसरे शोधन के बाद कलन-विधि*
(1) पानी उबालिए।	(1.1)	एक प्याला पानी लीजिए।	
	(1.2)	पानी को एक खाली बर्तन में डालिए।	

	(1.3) अंगीठी जलाइए।	
	(1.4) बर्तन को अंगीठी पर रखिए।	
	(1.5) जब तक पानी उबले तब तक प्रतीक्षा कीजिए।	
(2) उबलते पानी में चीनी डालिए।	(2.1) चीनी का डिब्बा खोलिए।	(2.1.1) अलमारी से चीनी का डिब्बा लाइए।
	(2.2) एक चम्मच चीनी लीजिए।	(2.1.2) इसका ढक्कन खोलिए।
	(2.3) अंगीठी पर रखे उबलते पानी में एक चम्मच चीनी डालिए।	
	(2.4) चीनी का डिब्बा बन्द कीजिए	(2.4.1) चीनी के डिब्बे का ढक्कन बन्द कीजिए।
		(2.4.2) चीनी का डिब्बा अलमारी में रखिए।
(3) उबलते पानी में चाय डालिए।	(3.1) चाय का डिब्बा खोलिए।	(3.1.1) अलमारी से चाय का डिब्बा लाइए।
		(3.1.2) इसका ढक्कन खोलिए।
	(3.2) एक चम्मच चाय लीजिए।	
	(3.3) अंगीठी पर रखे उबलते पानी में चम्मच भर चाय डाल दीजिए।	
	(3.4) चाय का डिब्बा बन्द कीजिए।	(3.4.1) चाय के डिब्बे का ढक्कन बन्द कीजिए।
		(3.4.2) चाय का डिब्बा वापस अलमारी में रखिए।
(4) मिश्रण को एक प्याले में छानिए।	(4.1) अंगीठी बुझाइए।	
	(4.2) मिश्रण को एक प्याले में छानिए।	
(5) प्याले में दूध मिलाइए।	(5.1) प्याले में तब तक दूध मिलाइए। जब तक कि मिश्रण का काला रंग हल्के भूरे रंग में न बदल जाये।	

इस अध्याय के प्रारंभ में, हमने एक प्रश्न पूछा था : ''कोई व्यक्ति किसी समस्या को हल करने का प्रयत्न कैसे करता है?'' अब तक दिये गये उदाहरणों द्वारा आप इसके बारे में कुछ अवश्य समझ गये होंगे। जब कभी किसी व्यक्ति के सम्मुख कोई समस्या आती है, तो समस्या के बारे में अपनी समझ से प्रेरित हो वह सोचता है और समस्या के हल के प्रमुख चरणों का निश्चय कर लेता है जिनके करने पर, समस्या के हल तक पहुंच जाता है। प्रायः किसी भी व्यक्ति के लिए यह संभव नहीं है कि वह एक ही बार में, सभी कार्यों के बारे में पूरे विस्तार से सोच सके। इसलिए चरणशः प्रक्रिया के प्रारंभ में पहले प्रमुख चरणों की एक सूची बनानी होगी जिन्हें करना समस्या के हल के लिए आवश्यक है। इसके पश्चात्, हम इन प्रमुख चरणों पर एक-एक करके विचार कर सकते हैं। ऐसा प्रत्येक प्रमुख चरण एक स्वतंत्र इकाई होता है। इसलिए उन सभी कार्यों के बारे में सोचा जा सकता है जो इस प्रमुख चरण में सम्मिलित हो सकते हैं। इसका अभिप्रायः यह है कि हम एक समय पर एक प्रमुख चरण को समझने की बेहतर स्थिति में होते हैं और इस पर अधिक स्पष्टता से सोच सकते हैं। इसलिए हम ऐसे अधिक सरल विस्तृत और अधिक निश्चित उप-चरणों का वर्णन कर सकते हैं, जिनके करने पर, वह प्रमुख कार्य सम्पन्न हो जाता है। ऐसा प्रत्येक उपकार्य, प्रमुख चरण के शोधन में एक उपचरण निश्चित करता है। यही चरणशः शोधन रीति (या तकनीक) है।

यदि समस्या सरल हो और व्यक्ति की पहुंच में हो, तो वह एक ही बार में शोधन किए बिना समस्त कलन-विधि को लिख सकता है। हमारे उदाहरणों 17.1 और 17.2 में ठीक यही स्थिति थी। उदाहरण 17.4 में, हमने प्रत्येक चरण का शोधन केवल एक बार किया। उदाहरण 17.5 में, हम कुछ चरणों में शोधन के दूसरे स्तर तक गए। उदाहरण 17.2 में, यदि कोई व्यक्ति यह निश्चय नहीं कर सकता कि क्या $S \geq |T|$ है, तो हमें इस चरण को और शोधित करना पड़ सकता है। कोई स्वाभाविक रूप से प्रश्न कर सकता है कि शोधन का यह प्रक्रम कब तक चलता रहेगा। यह अनिश्चित समय तक नहीं जा सकता। ठीक उत्तर यह होगा कि प्रक्रम तब तक चलता रहेगा, जब तक कि प्रत्येक चरण उस व्यक्ति या मशीन को स्पष्ट न हो जाए, जिसे समस्या हल करने के लिए, इनको पूरा करना है।

यदि कलन-विधि के अनुदेशों का पालन किसी व्यक्ति को करना है, तो यह निश्चय करने के लिए कि शोधन प्रक्रम कहाँ तक ले जाया जाए हमें उस व्यक्ति की योग्यता और ज्ञान स्तर की जानकारी प्राप्त करनी होगी। उदाहरण के लिए, यदि कोई व्यक्ति जोड़ना जानता हो, परन्तु गुणा करना नहीं, तो चरण '2 को 5 से गुणा कीजिए' उसको स्पष्ट नहीं होगा। हमें इस चरण का इस प्रकार शोधन करना होगा :

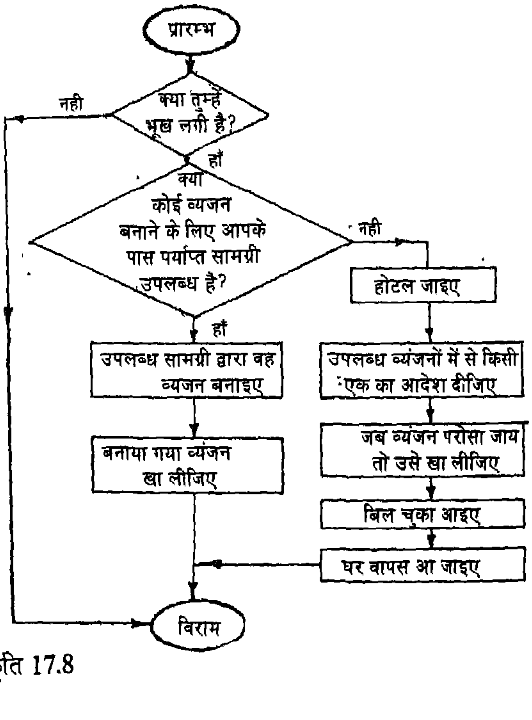
'2 को पाँच बार जोड़िए।'

जहाँ तक व्यक्तियों का सम्बन्ध है, ऐसा कोई निश्चित और दृढ़ नियम नहीं हो सकता जो यह बता सके कि शोधन कहाँ तक किया जाए। परन्तु कम्प्यूटर का निर्माण कुछ इस प्रकार का होता है कि उसके अनुदेशों को समझने की क्षमता और स्तर ज्ञात हो जाते हैं। जैसा कि हम पहले बता चुके हैं, मनुष्य किसी

भाषा जैसे "बेसिक" (BASIC), "पास्कल" (PASCAL), "कोबोल" (COBOL), "फोर्ट्रान" (FORTRON) आदि के प्रयोग से कलन-विधि का अनुवाद कर, कम्प्यूटर के साथ बातचीत करता है। इन भाषाओं को *क्रमादेशन भाषाएँ (programming languages)* कहते हैं। इन भिन्न-भिन्न क्रमादेशन भाषाओं का भिन्न-भिन्न प्रयोग स्तर होता है। एक बार जब हम उस भाषा का निश्चय कर लें जिसका प्रयोग उस कम्प्यूटर से बातचीत में करना है, तो हम उस भाषा की शब्दावली और व्याकरण के नियम ज्ञात करते हैं। फिर कलन-विधि को शोधन के उसी स्तर तक ले जाते हैं जिसमें केवल वही अनुदेश और रचनाएँ होती हैं जिनको वह भाषा स्वीकार करती है। उदाहरण के लिए, एक विशेष क्रमादेशन भाषा में 'वर्गमूल ज्ञात कीजिए' एक स्वीकृत रचना हो सकती है। अतः, 8 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए, उस भाषा में एक स्वीकृत अनुदेश होगा। यदि हम किसी अन्य क्रमादेशन भाषा का प्रयोग करें और यदि वह भाषा ऐसे अनुदेश को स्वीकार नहीं करती, तो हमें इस चरण को और अधिक मौलिक संक्रियाओं के पदों में शोधित करना पड़ेगा। ऐसे कलन-विधि की स्थिति में जिसका पालन एक मनुष्य द्वारा किया जाना है, यह निश्चय करने के लिए कि कौन से कार्य मौलिक व प्रारंभिक समझे जा सकते हैं, हमें अपनी निर्णय योग्यता का प्रयोग करना होगा। हम अपनी कलन-विधि का उस स्तर तक शोधन करते रहेंगे जिसमें ऐसे ही मौलिक कार्य होंगे। उदाहरणों 17.3, 17.4, और 17.5 में वर्णन की गई दैनिक जीवन की समस्याओं जैसी स्थितियों में हम कलन-विधि का शोधन तब तक करते रहेंगे, जब तक कि इसमें केवल वही कार्य हों जो एक साधारण मनुष्य समझ सकता है।

प्रश्नावली 17.3

1. दिखाये गए प्रवाह-संचित्र द्वारा प्रदर्शित कलन-विधि क्या है?



आकृति 17.8

2. भोजन के लिए, चावल बनाने की एक कलन-विधि विकसित कीजिए।
3. यदि कोई व्यक्ति दो संख्याओं का घटाना नहीं जानता परन्तु संख्या रेखा पर, संख्या को पहचान सकता है, तो ऐसे व्यक्ति के लिए, दो दी हुई संख्याओं में से छोटी संख्या ज्ञात करने के लिये एक कलन-विधि विकसित कीजिए।
4. एक प्याला काफी बनाने के लिए एक कलन-विधि विकसित कीजिए।
5. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक प्रवाह संचित्र बनाइए।
6. हम ''पुस्तकालय से एक पुस्तक उधार लेना'' कार्य पर एक कलन-विधि विकसित करना चाहते हैं। मूल कलन-विधि के निम्नलिखित प्रमुख चरण हैं :
    1. पुस्तक सूची (catalogue) से पुस्तक को दिया गया नम्बर ज्ञात कीजिए।
    2. निश्चय कीजिए कि क्या पुस्तकालय की शैल्फ में पुस्तक उपलब्ध है।
    3. यदि उपलब्ध हो तो पुस्तक अपने नाम पर ले लीजिए।

   इन चरणों को और अधिक शोधित कीजिए। शोधित करते समय निम्नलिखित बातों को सम्मिलित कर लीजिए :

   (क) यदि पुस्तक पुस्तकालय के पास नहीं है तो उसे खरीदने के लिए सिफारिश कीजिए।
   (ख) यदि पुस्तक पुस्तकालय के पास है, परन्तु इस समय उपलब्ध नहीं है, तो अपना अधिकार सुरक्षित रखने के लिए, एक प्रार्थना पत्र दे दीजिए।

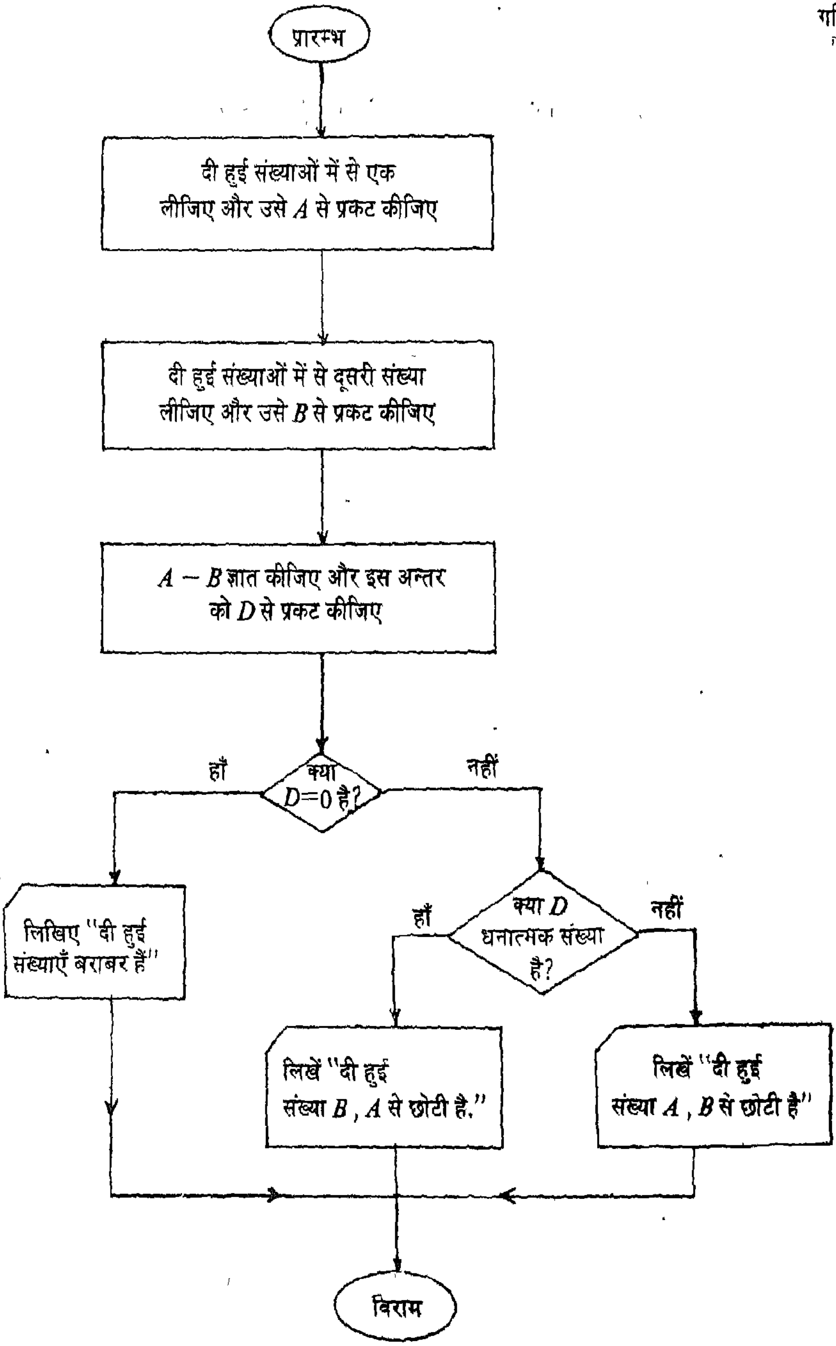
17.7 कुछ और उदाहरण

कलन-विधि विकसित करने के हम दो और उदाहरण लेंगे।

उदाहरण 17.6 : दी हुई दो संख्याओं में से छोटी संख्या ज्ञात करने के लिए एक कलन-विधि विकसित कीजिए।

हल : यह एक बहुत सरल कार्य है। हल प्राप्त करने के लिए हमारे पहले प्रयत्न से निम्नलिखित कलन-विधि प्राप्त होगी :

1. संख्याओं में से एक का निश्चय कीजिए और उसे A मान लीजिए।
2. दूसरी दी हुई संख्या का निश्चय कीजिए और उसे B मान लीजिए।
3. $A - B$ ज्ञात कीजिए और इस अन्तर को D मान लीजिए।
4. यदि $D = 0$ हो, तो दी हुई संख्याएँ बराबर हैं तथा अपनी प्रक्रिया यहीं समाप्त कर दीजिए अन्यथा चरण (5) पर आ जाइए।



आकृति 17.9 : दी हुई संख्याओं में से छोटी संख्या ज्ञात करने के लिए प्रवाह संचित्र

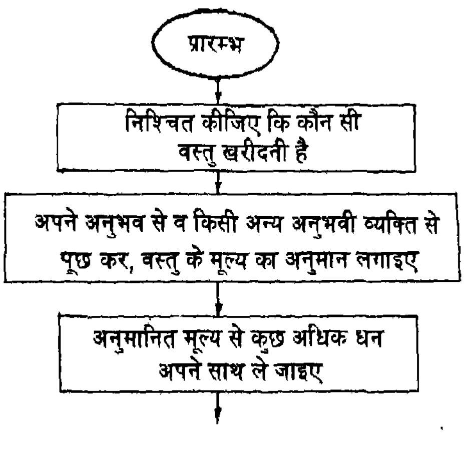
5. यदि D धनात्मक संख्या हो, तो दी हुई दो संख्याओं में B छोटी है, और अपनी प्रक्रिया यहीं समाप्त कर दीजिए। अन्यथा A छोटी है और अपनी प्रक्रिया यहीं समाप्त कीजिए।

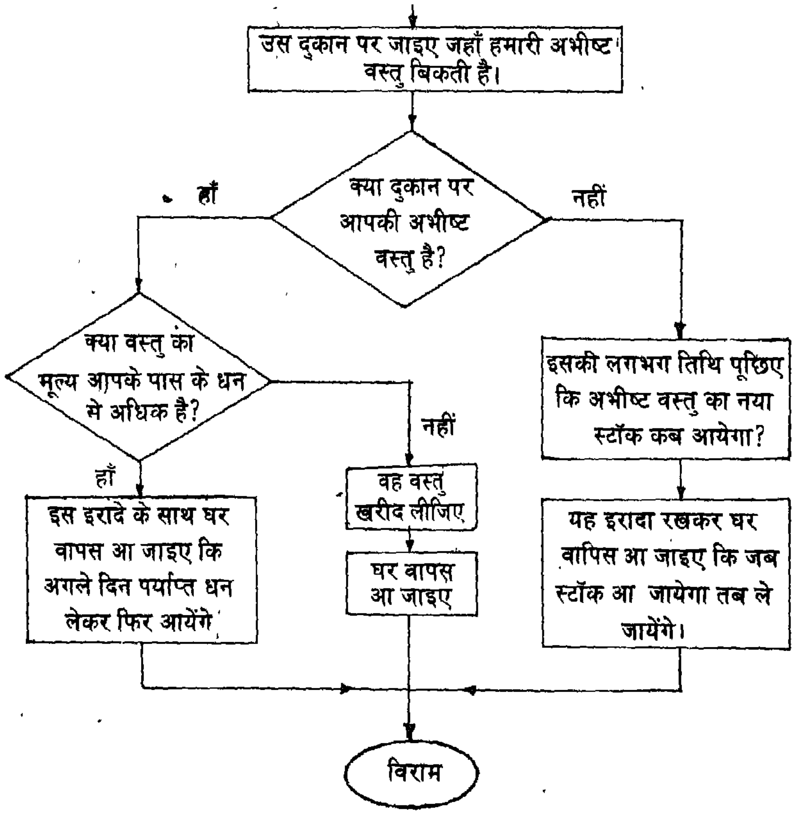
इस कलन-विधि का प्रत्येक चरण पर्याप्त रूप से मौलिक है और इसलिए, हमारे विचार में इसमें अब और शोधन की आवश्यकता नहीं है।

हमने उपरोक्त कलन-विधि को उसके चरणों को क्रम से एक दूसरे के नीचे लिखकर प्रकट किया है। हमने चरणों को पहचानने के लिए उन्हें क्रम संख्या से प्रकट किया है। वैकल्पिक रूप में हम इस कलन-विधि को एक प्रवाह संचित्र के रूप में लिख सकते हैं, जो आकृति 17.9 में दर्शाया गया है :

उदाहरण 17.7 : कोई वस्तु खरीदने में सम्बद्ध कार्य कलापों (क्रियाओं) को प्रदर्शित करने के लिए एक प्रवाह संचित्र बनाइए। यहाँ यह मान लिया गया है कि हम वह वस्तु एक विशिष्ट दुकान से ही खरीदेंगे जबकि हम उस दुकान पर जाएं और वह वस्तु वहाँ उपलब्ध हो। यदि आवश्यक हो, तो हम उसी दुकान पर पुनः आने का निश्चय भी कर सकते हैं।

हल : इस संबंध में निम्नलिखित कार्यकलाप सम्बद्ध हैं; किस वस्तु को खरीदना है उसका निश्चय करना, उसके मूल्य का अनुमान लगाना, दुकान पर जाते समय अपने साथ पर्याप्त धन ले जाना, और यह ध्यान में रखना कि यदि वह वस्तु हमारे जाने के समय दुकान पर उपलब्ध न हो या यदि मूल्य इतना बढ़ गया हो कि हमारे पास धन कम पड़ जाए तो हमें वापस आना पड़ सकता है। इसके लिए प्राप्त एक प्रवाह संचित्र को आकृति 17.10 में दिखाया गया है।

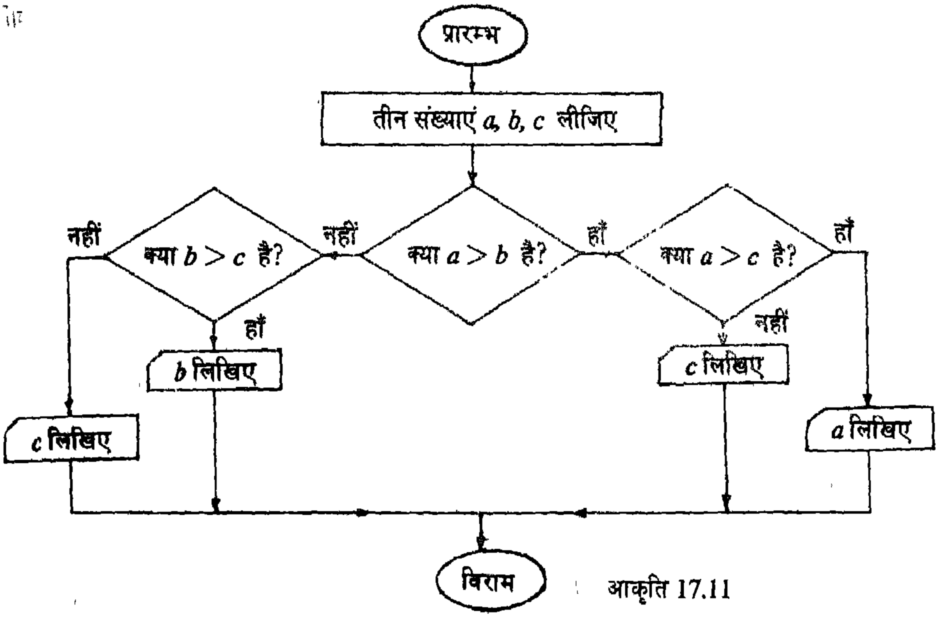




आकृति 17.10 : एक वस्तु खरीदने से संबद्ध प्रवाह संचित्र

प्रश्नावली 17.4

1. एक व्यक्ति का अपने चाचा जी के घर जाने और फिर वापस घर लौट आने का विचार है। उसका स्कूटर पर जाने और स्कूटर से ही वापस आने की योजना है। उसके रास्ते में एक पेट्रोल पम्प है। उस व्यक्ति का यह नियम है : यदि उसका स्कूटर आरक्षित (reserve) पेट्रोल के स्तर पर आ गया है, या पेट्रोल पम्प से उसका अगला रुकने का स्थान 15 किमी से अधिक दूर है तो वह पेट्रोल पम्प से 5 लीटर पेट्रोल लेता है। उसकी प्रस्तावित यात्रा में किये जाने वाले कार्यकलापों का एक प्रवाह-संचित्र बनाइए।



आकृति 17.11

2. आकृति 17.11 का प्रवाह संचित्र क्या दिखाता है?
3. तीन दी हुई संख्याओं में सबसे छोटी संख्या ज्ञात करने के लिए एक कलन-विधि विकसित कीजिए।
4. एक समकोण त्रिभुज, जिसकी दो भुजाओं की लम्बाइयां दी हुई हों, के कर्ण की लम्बाई ज्ञात करने के लिए एक प्रवाह संचित्र बनाइए।
5. एक विद्यार्थी द्वारा तीन विषयों में प्राप्त किए गए अंकों का औसत और उसके द्वारा प्राप्त श्रेणी ज्ञात करने के लिए प्रवाह संचित्र बनाइए। (उसकी श्रेणी निर्धारित करने के लिए, सामान्य रूप से प्रयोग किए जाने वाले अंक-विभाजन की कल्पना कीजिए।)
6. प्रातः घर से स्कूल जाने की तैयारी करने की एक कलन-विधि विकसित कीजिए।
7. साकेट (socket) में से खराब हो गए बल्ब के स्थान पर एक नया बल्ब लगाने के लिए हम एक कलन-विधि विकसित करना चाहते हैं। हमारी प्रारंभिक कलन-विधि निम्न है :
   (1) पुराने बल्ब को साकेट में से निकालिए।
   (2) उसी साकेट में एक नया बल्ब लगाइए।
   इस कलन-विधि का चरणशः शोधन कीजिए।
8. **अपने भोजन के लिए एक *चपाती* बनाने की एक कलन विधि विकसित कीजिए।**

अध्याय 18

सांख्यिकी

18.1 भूमिका

अपने दैनिक जीवन में हमें विज्ञापनों, समाचार पत्रों, पत्रिकाओं और अन्य स्थानों में संख्यात्मक आँकड़ों से सामना होता रहता है। ये आँकड़े निर्वाह-व्यय, क्रिकेट के औसत ब्यौरे, कंपनियों के लाभ/हानि के ब्यौरे, नगरों के तापमान, पंचवर्षीय योजना के भिन्न-भिन्न क्षेत्रों के व्यय आदि से संबंधित होते हैं। उदाहरण के लिए यदि आप किसी समाचार पत्र को पढ़ें तो उसमें आपको मौसम की रिपोर्ट देखने को मिल सकती है जिसमें भारत के प्रमुख नगरों के अधिकतम-निम्नतम तापमान और वर्षा से संबंधित आँकड़े दिए होते हैं।

हमारा वर्तमान समाज अनिवार्य रूप से सूचना अभिविन्यस्त (information-oriented) हो गया है। किसी न किसी रूप में जीवन के प्रत्येक कार्यकलाप में संख्यात्मक आँकड़ों का प्रयोग होता रहता है। अतः इन आँकड़ों से उपयोगी सूचना प्राप्त करने की विधि को जानना आवश्यक हो गया है। सांख्यिकी (statistics) वह विज्ञान है जो इस कार्य में हमारी सहायता करता है।

अंग्रेजी में सांख्यिकी को स्टेटिस्टिक्स (statistics) कहते हैं। ऐसा जान पड़ता है कि शब्द 'स्टेटिस्टिक्स' की उत्पत्ति लैटिन भाषा के शब्द स्टेटस (status) से हुई है जिसका अर्थ है "एक (राजनैतिक) राज्य"। शुरू-शुरू में सांख्यिकी कोजीवन के विभिन्न पहलुओं से संबंधित उन संख्यात्मक आँकड़ों से एकत्रित करने में किया जाता था जो कि राज्य के लिये उपयोगी हों। समय के साथ-साथ इसका क्षेत्र भी बढ़ता गया। इसमें आँकड़ों को सारणियों और संचित्रों के रूप में एकत्रित करना भी शामिल हो गया। उन्नीसवीं शताब्दी के अंत तक सांख्यिकी का संबंध न केवल आंकड़ों के एकत्रीकरण और प्रस्तुतीकरण से ही रह गया था बल्कि इसके अंतर्गत आँकड़ों से निष्कर्ष निकालना और उनका विवेचन करना भी शामिल हो गया।

18.2 सांख्यिकी और सांख्यिकीय आंकड़े

सांख्यिकी,जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में, एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है और वैज्ञानिक अनुसंधान के प्रत्येक क्षेत्र में बड़ी ही उपयोगी सिद्ध हुई है। सांख्यिकी एक विज्ञान है। जिसका संबंध, संख्यात्मक आँकड़ों के संग्रह, उनके प्रस्तुतीकरण और उन से निष्कर्ष निकालने की प्रक्रिया से है।

सांख्यिकीय आँकड़ों से अभिप्राय उन संख्यात्मक तथ्यों अथवा प्रेक्षणों से है, जिनका संग्रह किसी पूर्व निर्धारित उद्देश्य को दृष्टि में रख कर किया जाए। उदाहरण के लिए, किसी देश की जनसंख्या सम्बन्धी आँकड़े, पुरुषों-स्त्रियों की संख्या, किसी नगर के व्यक्तियों की आय-व्यय के आँकड़े, इत्यादि।

संख्यात्मक तथ्यों के कुछ भौतिक अभिलक्षण निम्नलिखित हैं:

1. सांख्यिकीय आँकड़े परिमाणात्मक रूप में व्यक्त किए जाते हैं न कि गुणात्मक रूप में।
2. सांख्यिकीय आँकड़े प्रेक्षणों का समूह होता है। केवल एक प्रेक्षण से सांख्यिकीय आंकड़े प्राप्त नहीं होते।
3. सांख्यिकीय आँकड़ें किसी पूर्व निर्धारित उद्देश्य से एकत्रित किए जाते हैं।
4. किसी प्रयोग से प्राप्त आँकड़ों की तुलना* की जा सकती है और उन्हें विभिन्न वर्गों में बाँटा जा सकता है।

सांख्यिकीय आँकड़े दो प्रकार के होते हैं। यदि कोई अनुसन्धानकर्ता किसी उद्देश्य या योजना को ध्यान में रखकर स्वयं आँकड़ों का संग्रह करता है, तो इन आँकड़ों को *प्राथमिक आँकड़े* (primary data) कहते हैं। इसलिए ये आँकड़े बहुत अधिक विश्वसनीय और प्रासंगिक होते हैं। किन्तु, समय, धन या अन्य साधनों के अभाव में, अनुसन्धानकर्ता के लिए, प्राथमिक आँकड़े संग्रह करना सदा सम्भव नहीं होता। अनेक बार वह, किसी अन्य व्यक्ति द्वारा संग्रह किये गए आँकड़ों का प्रयोग करता है। ये आँकड़े सरकार द्वारा प्रकाशित रिपोर्ट, उसके द्वारा संग्रह किये गए अधिकृत आँकड़ों, इत्यादि के रूप में उपलब्ध होते हैं क्योंकि वही आँकड़े भिन्न-भिन्न उद्देश्यों की पूर्ति में सहायक हो सकते हैं; इसी लिए यह सम्भव है कि एक व्यक्ति द्वारा संग्रह किये गए आँकड़े, दूसरा व्यक्ति अपने अनुसंधान के लिए प्रयोग कर ले। ऐसे आँकड़ों को जो एक व्यक्ति द्वारा किसी अन्य उद्देश्य से संग्रह किये गए हों और जो एक अनुसंधान कर्ता अपने अनुसंधान में प्रयोग कर ले, *गौण आँकड़े* (secondary data) कहते हैं। गौण आँकड़ों को बड़ी सावधानी से प्रयोग करना होता है क्योंकि इन्हें प्रयोगकर्ता के उद्देश्य से भिन्न उद्देश्य से संग्रह किया गया होता है और इस लिए कुछ सूचनाएँ छूट सकती है या ये भी हो सकता है कि पूर्ण रूप से वे वर्तमान अनुसंधान के उपयुक्त न हों।

18.3 आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण

आँकड़ों को संग्रह करने का काम पूरा होते ही अन्वेषक उनके प्रमुख लक्षणों का अध्ययन करने के लिए, ऐसी उपयुक्त विधियों का पता लगाता है जिनसे आँकड़ों को सारणी रूप में रखा जा सके। आँकड़ों को सारणी रूप में रखने की प्रक्रिया को *आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण* (presentation of data) कहते हैं।

---

* तुलनीयता से हमारा अभिप्राय यह है कि यदि किसी प्रयोग को बार-बार किया जाए तो प्रत्येक बार एकत्रित किए गए आँकड़ों की तुलना की जा सकती है।

मान लीजिए, एक स्कूल में कक्षा 9 के एक सेक्शन में 30 विद्यार्थी हैं; और एक परीक्षण में, कुल 50 अंकों में से उन्होंने इस प्रकार अंक प्राप्त किये:

25, 20, 16, 18, 30, 35, 40, 16, 20, 18, 25, 30, 46, 40, 30, 5, 10, 25, 18, 20, 30, 25, 44, 28, 35, 30, 25, 25, 20, 30

इस रूप में दिये गए आंकड़ों को *अपरिष्कृत* (raw) या *अवर्गीकृत* (ungrouped) आंकड़े कहते हैं।

अब मान लीजिए हम इस कक्षा के विद्यार्थियों की उपलब्धि सार मालूम करना हैं। अपरिष्कृत आँकड़ों से कक्षा के बारे में कोई स्पष्ट चित्र प्राप्त नहीं होता। यदि हम इन्हें आरोही या अवरोही क्रम में रखें तो कुछ अच्छा चित्र प्राप्त होगा। आरोही क्रम में, आँकड़े इस प्रकार दिखाई देंगे :

5, 10, 16, 16, 18, 18, 18, 20, 20, 20, 20, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 28, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 35, 35, 40, 40, 44, 46

इस रूप में रखे गये आँकड़ों को *सारणी बद्ध आँकड़े* (arrayed data) कहते हैं। आँकड़ों को इस रूप में प्रस्तुत करना, एक थकाने वाला काम है और समय भी अधिक लेता है, विशेषतः तब जबकि किसी प्रयोग से प्राप्त आँकड़ों की संख्या काफी हो। इन्हें स्पष्ट और सुगमता से समझने योग्य बनाने के लिए, हम इन आँकड़ों को इस प्रकार सारणी रूप में रख सकते हैं।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
5	1
10	1
16	2
18	3
20	4
25	6
28	1
30	6
35	2
40	2
44	1
46	1
कुल जोड़	30

ऊपर की सारणी में, प्रत्येक अंक के सम्मुख, उन विद्यार्थियों की संख्या है जिन्होंने वे अंक प्राप्त किये हैं उदाहरण के लिए, 6 विद्यार्थियों ने 25 अंक प्राप्त किये; तीन ने 18 अंक प्राप्त किए इत्यादि। उस राशि को जिसे हम अलग-अलग प्रेक्षणों में मापते हैं, *विचर* (variate) कहते हैं। ऊपर के उदाहरण में परीक्षा में प्राप्त अंक विचर है और अंक विशेष प्राप्त करने वाली संख्या विचर की बारंबारता है। इस तरह ऊपर दी गई सारणी को अवर्गीकृत आँकड़ों की बारंबारता बंटन सारणी कहा जाता है।

आंकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में रखना एक थकाने वाला काम है और इससे आंकड़ों के अधिकतम मान और निम्नतम मान के अतिरिक्त कोई अन्य विशेष तथ्य प्राप्त नहीं होता। इसलिए, आंकड़ों के कुछ मुख्य लक्षणों को मालूम करने के लिए, हम आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण को अधिक सरल बनाते हैं और हम उन्हें वर्गों (group) में रखते हैं। आंकड़ों को इस रूप में प्रस्तुत करने से, हम उसके कुछ मुख्य लक्षणों का पता देखकर ही लगा सकते हैं। परंतु इस प्रस्तुतीकरण में एक कमी भी है। इसमें प्रत्येक वर्ग की बारंबारता को उस वर्ग के मध्य बिन्दु पर, की बारंबारता माना जाता है।

ऊपर के आंकड़ों को हम वर्गों में इस प्रकार प्रस्तुत कर सकते हैं।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)
1—5	1
6—10	1
11—15	0
16—20	9
21—25	6
26—30	7
31—35	2
36—40	2
41—45	1
46—50	1
कुल जोड़	30

इसे वर्गीकृत आंकड़ों की *बारंबारता बंटन सारणी* या केवल *बारंबारता सारणी* कहते हैं। आंकड़ों के प्रस्तुतिकरण की यह विधि, पहले की विधियों की अपेक्षा अधिक उत्तम विधि है, क्योंकि, इसे केवल

देखकर ही यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अधिकांश विद्यार्थियों ने 16-30 के परिसर (range) में अंक प्राप्त किए हैं। दूसरे शब्दों में, विद्यार्थियों का यह वर्ग एक औसत वर्ग है।

ऊपर दी गई सारणी में विभिन्न *वर्ग अंतरालों* (class interval) की *निम्न सीमा* (lower limit) और *उपरि सीमा* (upper limit) के बीच अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या दी गई है। पहले वर्ग अंतराल की निम्न सीमा 1 है और उपरि सीमा 5 है। उन विद्यार्थियों, जिनके प्राप्त अंक इस वर्ग अंतराल में आते हैं, अर्थात् 1 से 5 तक हैं, की संख्या 1 है। इसी प्रकार 16 से 20 तक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 9 है।

ऊपर दी गई सारणी में, वर्ग अंतराल अनतिव्यापी (non-overlapping) हैं। इस उदाहरण में कोई भिन्नात्मक अंक नहीं हैं। किंतु यदि हमें लंबाई या भार मापना हो तो मीटर या किलोग्राम के भिन्नात्मक मान भी हो सकते हैं। अतः हमें वर्ग अंतरालों को *सतत* (continuous) बनाना होगा। वर्ग की उपरि सीमा और अगले वर्ग की निम्न सीमा के बीच की संख्या उस वर्ग की *वास्तविक उपरि सीमा* और अगले वर्ग की *वास्तविक निम्न सीमा* होती है। इस प्रकार, ऊपर की सारणी में, पहले वर्ग अंतराल की वास्तविक निम्न और वास्तविक उपरि सीमाएं क्रमशः 0.5 और 5.5 है। इसी प्रकार दूसरे वर्ग अंतराल की वास्तविक सीमाएं क्रमशः 5.5 और 10.5 हैं, इत्यादि। किसी वर्ग अंतराल की वास्तविक उपरि सीमा और वास्तविक निम्न सीमा के अन्तर को उस *वर्ग अंतराल* का आमाप (size) कहते हैं। ऊपर के उदाहरण में, पहले वर्ग अंतराल का आमाप 5.5—0.5 अर्थात् 5 है। किसी वर्ग विशेष के मध्य मान को उस वर्ग का *वर्ग चिह्न* (class mark) कहते हैं। इस प्रकार

$$\text{किसी वर्ग का वर्ग चिह्न} = \frac{\text{उपरि वर्ग सीमा} + \text{निम्न वर्ग सीमा}}{2}$$

$$= \frac{\text{वास्तविक उपरि सीमा} + \text{वास्तविक निम्न सीमा}}{2}$$

ऊपर दिए गए बंटन के वर्ग चिह्न : 3,8,13... हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि दिए गए असंसाधित आंकड़ों (raw data) से वर्ग कैसे बनाएं। व्यावहारिक ज्ञान से यह स्पष्ट है कि वर्ग बनाते समय निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए:

1. वर्ग अनतिव्यापी हों।
2. वर्गों के बीच कोई रिक्ति न हो।
3. जहां तक संभव हो, सब वर्ग एक ही आमाप के हों।
4. जहां तक संभव हो, विवृतांत वर्ग (open end class) (जैसे 2 से कम, 5 से अधिक) नहीं बनाने चाहियें।
5. प्रत्येक वर्ग की सीमाएं इस प्रकार चुनें कि यह ज्ञात करने में अनिश्चितता न हो कि कोई दिया हुआ मान किस वर्ग का है।

अतः आंकड़ों से वर्ग बनाने की प्रक्रिया हम निम्नलिखित चरणों में पूरी करते हैं।

चरण 1: आंकड़ों से विचर (variate) के निम्नतम और अधिकतम मान ज्ञात करते हैं। ऊपर के उदाहरण में ये मान 0 और 50 हैं।

चरण 2: कितने वर्ग बनाने हैं, फिर इसका निर्णय लेते हैं। इसके लिए कोई विशेष नियम नहीं है, परंतु प्रायः वर्गों की संख्या 5 और 15 के बीच रखते हैं। ऊपर के उदाहरण में यह संख्या 10 है।

चरण 3: वर्ग अंतराल प्राप्त करने के लिए हम 'अधिकतम मान–निम्नतम मान' के अंतर को वर्गों की निश्चित संख्या से भाग देते हैं। इस भागफल से वर्ग आमाप का एक लगभग मान प्राप्त होता है और हम इस मान के निकट एक सुविधाजनक संख्या को वर्ग का आमाप मान लेते हैं। ऊपर के उदाहरण में, यह आमाप 50 ÷ 10 अर्थात् 5 है।

टिप्पणी :आंकड़ों में अधिकतम मान और निम्नतम मान के अंतर को *परिसर* (range) कहते हैं।

चरण 4: यह पुष्टि करनी चाहिये कि अधिकतम मान और निम्नतम मान सम्मिलित करने वाले वर्ग हमने बना लिए हैं। ऊपर के उदाहरण में निम्नतम मान 1 है जो वर्ग 1-5 में सम्मिलित है और अधिकतम मान 46 है जो वर्ग 46-50 में सम्मिलित है।

चरण 5: आंकड़ों में से प्रत्येक संख्या को एक-एक करके लेते हैं और जिस वर्ग में वह संख्या होनी चाहिये, उसके सामने एक *'मिलान चिह्न'* लगाते है। गणना में सुविधा के लिए हम मिलान चिह्नों को पांच पांच के समूहों में लेते हैं। जहां पांचवां मिलान चिह्न, अन्य चारों को कर्णवत् काटता है। उदाहरण के लिए ~~||||~~ ||| = 8

चरण 6: गणना करके, हम प्रत्येक वर्ग के मिलान चिह्नों की संख्या ज्ञात करते हैं और यही उस वर्ग की बारंबारता होती है। स्पष्ट है कि सभी बारंबारताओं का जोड़ वही होगा जो कि कुल आंकड़ों की संख्या है। अन्त में, प्राप्त बारंबारता बंटन सारणी को एक उपयुक्त शीर्षक देना चाहिये जिससे कि इस शीर्षक से ठीक संकेत मिल जाए कि यह सारणी किस बारे में है। निम्न उदाहरणों द्वारा यह प्रक्रिया और स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 18.1 : एक उप-नगरी के 30 घरों के पानी के बिल (रुपयों में) नीचे दिये हैं। वर्ग आमाप 10 लेकर एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

30, 32, 45, 54, 74, 78, 108, 112, 66, 76, 88, 40, 14, 20, 15, 35, 44, 66, 75, 84, 95, 96, 102, 110, 88, 74, 112, 14, 34, 44

हल : यहां निम्नतम संख्या 14 है और अधिकतम संख्या 112 है। उनका अंतर $112 - 14 = 98$ है।
क्योंकि $98 \div 10 = 9.8$, अतः हम 10 आमाप के 10 वर्ग बनाएंगे।
यदि अधिकतम संख्या 112 को सम्मिलित करने के लिए, अंतिम वर्ग की उपरि सीमा 112 लें तो पहले वर्ग की उपरि सीमा 22 रखनी होगी। (क्यों?)
ऊपर के तथ्यों को ध्यान में रखते हुए, हम बारबारता बंटन सारणी की रचना इस प्रकार करते हैं:

30 घरों के पानी के बिलों की बारबारता (बंटन) सारणी

बिल *(रुपयों में)*	मिलान चिन्ह	बारंबारता
13—22	||||	4
23—32	||	2
33—42	|||	3
43—52	|||	3
53—62	|	1
63—72	||	2
73—82	~~||||~~	5
83—92	|||	3
93—102	|||	3
103—112	||||	4
कुल जोड़		30

यदि किसी वर्ग विशेष की बारबारता और उससे पूर्व के सभी वर्गों की बारंबारता का योग करें तो प्राप्त योग फल को उस वर्ग विशेष की *संचयी बारंबारता* (cumulative frequency) कहते हैं। संचयी बारंबारता के परिकलन के लिए वर्गों को आरोही क्रम में लिखना चाहिये। उस सारणी को जो यह प्रकट करे कि प्रत्येक वर्ग की संचयी बारंबारता क्या है, **संचयी बारंबारता (बंटन) सारणी** कहते हैं। उदाहरण 18.1 में दिये गए आंकड़ों की संचयी बारंबारता सारणी इस प्रकार है।

30 घरों के पानी के बिलों की संचयी बारंबारता बंटन सारणी

बिल (रुपयों में)	बारंबारता	संचयी बारंबारता
13—22	4	4
23—32	2	6 (= 2+ 4)
33—42	3	9 (= 3+2+4)
43—52	3	12 (=3+3+2+4)
53—62	1	13 (=1+3+3+2+4)
63—72	2	15 (= 2+1+3+3+2+4)
73—82	5	20 (= 5+2+1+3+3+2+4)
83—92	3	23 (= 3+5+2+1+3+3+2+4)
93—102	3	26 (= 3+3+5+2+1+3+3+2+4)
103—112	4	30 (= 4+3+3+5+2+1+3+3+2+4)

हम पाते हैं कि अंतिम वर्ग की संचयी बारंबारता या तो बारंबारताओं की कुल संख्या होती है या असंसाधित आंकड़ों में प्रेक्षणों की कुल संख्या होती है।

उदाहरण 18.2 : एक बंटन के वर्ग चिह्न हैं: 104, 114, 124, 134, 144, 154 और 164 वर्ग आमाप और वर्ग सीमाएं ज्ञात कीजिए।

हल : वर्ग आमाप, दो क्रमागत वर्गों के वर्ग चिन्हों का अंतर होता है। इसलिए

वर्ग आमाप = 114 – 104 = 10

अब हमें दिए गए मध्य बिन्दुओं 104, 114, 124, 134, 144, 154, 164 से आमाप 10 के वर्ग बनाने हैं।

पहले वर्ग की सीमाएं हैं :

$104-\frac{10}{2}$, $104+\frac{10}{2}$, अर्थात् 99, 109। इसी प्रकार, अन्य वर्गों की सीमाएं ज्ञात करते हैं। हमें निम्नलिखित वर्ग सीमाएं प्राप्त होती हैं।

99, 109; 109, 119; 119, 129; 129, 139; 139, 149; 149, 159; 159, 169

प्रश्नावली 18.1

1. 'सांख्यिकी' और 'सांख्यिकीय आंकड़े' से आप क्या समझते हैं।
2. सांख्यिकी के कुछ मौलिक अभिलक्षणों का वर्णन कीजिए।
3. परिभाषित कीजिए। (i) प्राथमिक आंकड़े (ii) गौण आंकड़े।
   इन दोनों में से कौन से--प्राथमिक आंकड़े या गौण आंकड़े अधिक विश्वसनीय होते हैं, और क्यों?
4. हम आंकड़ों का वर्गीकरण क्यों करते हैं?
5. निम्नलिखित शब्दों के अर्थ की व्याख्या कीजिए :
   (i) विचर (ii) वर्ग-अंतराल (iii) वर्ग-आमाप (iv) वर्ग चिह्न
   (v) वर्ग बारंबारता (vi) वर्ग संचयी बारंबारता (vii) वर्ग सीमाएं
   (viii) वास्तविक वर्ग सीमाएं
6. मौसम विभाग के अनुसार दिल्ली में, अगस्त 1974 में अधिकतम तापमान (सेलसियस डिग्री में) और सापेक्ष आर्द्रता (प्रतिशत में) के आंकड़े नीचे दिए गये हैं।
   प्रत्येक के लिए, एक बारंबारता सारणी बनाइए।

   अधिकतम तापमान (सेलसियस डिग्री में)

   32.5, 30.3, 33.8, 31.0, 28.6, 33.9, 33.3, 32.4, 30.4, 32.6, 34.7, 34.9, 31.6, 35.2, 35.3, 33.5, 36.4, 36.6, 37.0, 34.3, 32.5, 31.4, 34.4, 35.6 37.3, 37.5, 36.9, 37.0, 36.3, 36.9, 36.7

   सापेक्ष आर्द्रता (relative humidity) (प्रतिशत में):
   90, 97, 92, 95, 93, 95, 93, 85, 83 , 85, 83, 77, 83, 77, 74, 60, 71, 65 74, 80, 87, 82, 81, 76, 61, 63, 58, 58, 56, 57, 54
7. कक्षा 9 के, 50 विद्यार्थियों द्वारा, हिन्दी की परीक्षा में प्राप्त अंक नीचे दिये हैं। इन आंकड़ों से, संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

   42, 21, 51, 37, 42, 37, 38, 42, 49, 52, 38, 53, 57, 47, 29, 59, 61, 33, 17, 71, 39, 44, 42, 39, 14 , 7, 27, 19, 54, 51, 39, 43, 42, 16, 37, 67, 62, 39, 51, 53, 41, 53, 59, 37, 27, 33, 34, 42,22, 31
8. एक टोकरी में से, यादृच्छिक (random) रूप से चुने गए 40 संतरों के भार (ग्रामों में) नीचे दिये हैं।

45, 55, 30, 110, 75, 100, 40, 60, 65, 40, 100, 75, 70, 60, 70, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 85, 75, 85, 75, 70, 110, 100, 80, 70, 55, 30, 70

एक संचयी बारंबारता (बंटन) सारणी बनाइए।

9. अवधि 15.3.1987 से 14.5.1987 के लिए, एक उपनगरी के 25 घरों के बिजली के बिल (रुपयों में) नीचे दिये हैं :

50, 44, 10, 18, 5, 8, 56, 30, 22, 30, 24, 15, 12, 27, 42, 45, 25, 24, 20, 22, 14, 16, 25, 36, 47

आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए और एक बारंबारता सारणी और संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

10. एक वर्ष विशेष में, हिमाचल प्रदेश के प्राथमिक स्कूल के अध्यापकों की आयु (वर्षों में) का बंटन नीचे दिया गया है।

आयु (वर्षों में)	अध्यापकों की संख्या
16—20	11
21—25	32
26—30	51
31—35	49
36—40	27
41—45	6
46—50	4

(i) पहले वर्ग अंतराल की निम्न सीमा लिखिए।
(ii) चौथे वर्ग अंतराल की वर्ग सीमाएं ज्ञात कीजिए।
(iii) सातवें वर्ग अंतराल का वर्ग चिह्न ज्ञात कीजिए।
(iv) वर्ग आमाप ज्ञात कीजिए।
(v) एक संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

11. नीचे एक संचयी बारंबारता बंटन सारणी दी गई है जो पिछले 60 दिनों में, एक पोस्ट आफिस द्वारा प्राप्त पैकटों की संख्या और उनकी बारंबारता प्रकट करती है।

पैकटों की संख्या	60 दिनों में कितनी बार प्राप्त
10 से कम	17
20 से कम	22
30 से कम	29
40 से कम	37
50 से कम	50
60 से कम	60

इससे, बारंबारता सारणी बनाइए।

12. एक बंटन के वर्ग चिह्न हैं :
47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82, 87, 92, 97, 102

वर्ग माप, वर्ग सीमाएं, वास्तविक वर्ग सीमाएं ज्ञात कीजिए।

18.4 सांख्यिकीय आँकड़ों का आलेखी निरूपण

पिछले परिच्छेद में हमने दिए हुए आँकड़ों को सारणिक रूप में व्यवस्थित करना सीखा है। आँकड़ों को चित्रों द्वारा निरूपित करने पर हमें बेहतर संदर्श प्राप्त हो सकते हैं, क्योंकि आकर्षक ढंग से बनाए गए चित्र या आलेख अपनी ओर आकर्षित करते हैं और साथ ही जटिल आँकड़े सुबोध लगने लगते हैं। हम एक विशेष प्रकार के आलेख अर्थात् दंड आलेख (bar graph) से पहले परिचित हो चुके हैं जिसका प्रयोग हमने संख्यात्मक आँकड़ों को निरूपित करने में किया है।

इस परिच्छेद में हम बारंबारता बंटन के कुछ महत्वपूर्ण प्रकार के आलेख का अध्ययन करेंगे। इनमें से एक आलेख आयत-चित्र (histogram) है। आयत-चित्र अथवा बारंबारता आयत-चित्र बारंबारता बंटन का एक आलेख होता है। आइए किसी संगठन के 245 श्रमिकों की मासिक मज़दूरी के निम्नलिखित बारंबारता बंटन पर विचार करें।

245 श्रमिकों की मासिक मज़दूरी की बारंबारता बंटन

मासिक मज़दूरी	श्रमिकों की संख्या
325-350	30
350-375	45
375-400	75
400-425	60
425-450	35
कुल जोड़	245

ऊपर दिये गए बारंबारता बंटन का आयत-चित्र हम निम्न चरणों में बनाएंगे।

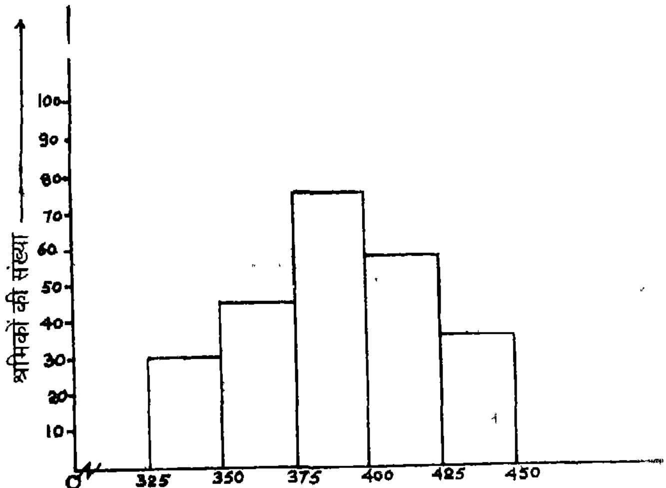
चरण 1 : उपयुक्त पैमाना (scale) लेकर, हम वर्ग सीमाओं को x- अक्ष पर निरूपित करेंगे।

चरण 2 : उपयुक्त पैमाना लेकर, हम y- अक्ष पर, बारंबारता को निरूपित करेंगे।

चरण 3 : फिर हम वर्ग अंतरालों को आधार तथा संगत बारंबारताओं को ऊँचाइयाँ लेते हुए आयतों की रचना करेंगे।

यह आवश्यक नहीं कि दोनों अक्षों पर एक ही पैमाना हो। हम दोनों अक्षों पर भिन्न-भिन्न पैमाना भी ले सकते हैं। पैमाने का चुनाव हम आँकड़ों के प्रकार और अपनी सुविधा के अनुसार करते हैं।

ऊपर दिये गए, श्रमिकों के मासिक मज़दूरी के बारंबारता बंटन का आयत-चित्र नीचे दिया गया है।



आकृति 18.1 : 245 श्रमिकों के मासिक मजदूरी के बारंबारता बटन का आयत-चित्र

क्योंकि x- अक्ष पर पैमाने की पहली संख्या 325 है, इसलिए, x- अक्ष पर, मूल बिन्दु के निकट एक भंग (kink) दिखा देते हैं, जिससे यह पता चल जाए कि आयत-चित्र ऐसे पैमाने से खींचा गया है, जो 325 से प्रारम्भ होता है, न कि मूल बिन्दु से।

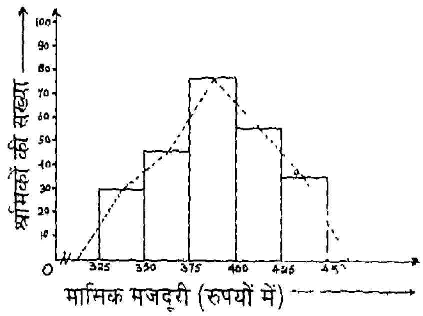
यदि आवश्यक हो, तो हम यही प्रक्रिया y- अक्ष पर भी लागू कर सकते हैं।

टिप्पणी : ऊपर के उदाहरण में, वर्ग अंतराल सतत हैं। यदि किसी उदाहरण में वर्ग अंतराल सतत न हों, तो इन्हें सतत बना लेना चाहिये, और फिर आयत-चित्र की रचना करनी चाहिये।

18.5 बारंबारता बहुभुज

आयत-चित्र में, प्रत्येक दो क्रमागत आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को एक रेखाखण्ड द्वारा मिलाने से जो आकृति हमें प्राप्त होती है उसे हम *बारंबारता बहुभुज* (frequency polygon) कहते हैं।

बहुभुज को पूरा करने के लिए, प्रत्येक सिरे पर, शून्य बारंबारता के, एक अतिरिक्त वर्ग अंतराल की कल्पना कीजिए*। आयत-चित्र के पहले आयत की ऊपरी भुजा के मध्य बिन्दु को, उसके पूर्व कल्पित वर्ग अंतराल के मध्य बिन्दु से, एक रेखाखण्ड द्वारा मिला दीजिए। इसी प्रकार, आयत चित्र के अन्तिम आयत के ऊपरी भुजा के मध्य बिन्दु को, आगे के कल्पित वर्ग अंतराल के मध्य बिन्दु से एक रेखाखण्ड द्वारा मिला दीजिए। ध्यान दीजिए कि इस प्रकार, बारंबारता बहुभुज का क्षेत्रफल वही होगा जो उसके संगत आयत-चित्र का है।



आकृति 18.2 बारंबारता बहुभुज जो 245 श्रमिको की मासिक मज़दूरी प्रदर्शित करती है।

* ऐसी स्थितियां भी हो सकती हैं जिनमे कल्पित वर्ग अंतराल सम्भव न हो। उदाहरण के लिए, विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंको की स्थिति में, दोनों सिरों पर, हम न तो 0 से कम अंको की कल्पना कर सकते हैं और न ही अधिकतम अंक से आगे अकों, की। ऐसी स्थितियों में, आकृति 18.3 (ii) के अनुसार बहुभुज पूरा करते हैं। इस आकृति में, सिरों के अतिरिक्त रेखाखण्डों के कुछ भाग ही खीचते हैं और फिर उन्हें सीधा नीचे 0 और 100 से मिला देते हैं। परन्तु ऐसी स्थिति में हम उपरोक्त प्रकार के भेद पर कोई बल नहीं देते।

बारंबारता बहुभुज को, स्वतन्त्र रूप से भी प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए, वर्ग अन्तरालों के मध्य बिन्दुओं को x- अक्ष पर, और बारंबारता को y- अक्ष पर निरूपित कर, बिन्दुओं को आलेखित करते हैं और फिर आलेखित किये हुए बिन्दुओं को रेखाखण्डों द्वारा मिला देते है।

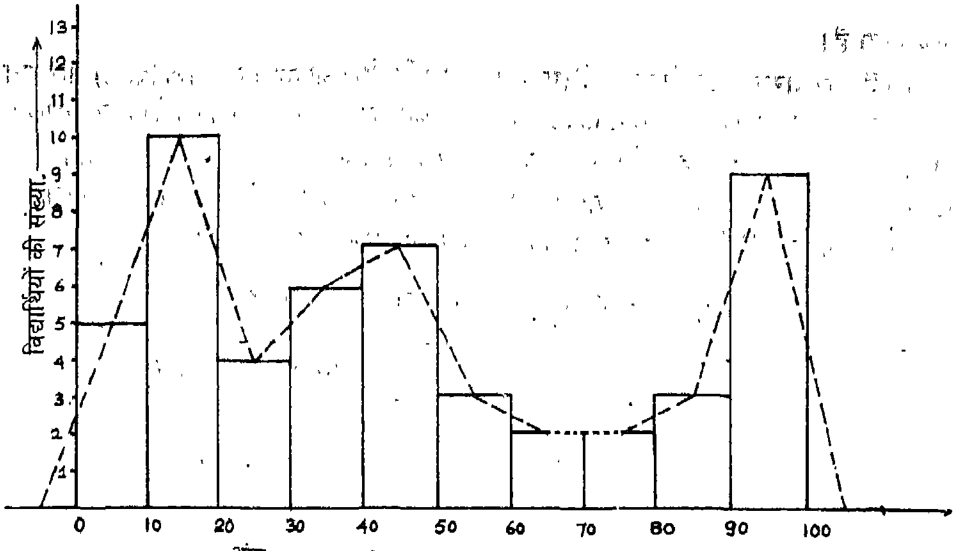
उदाहरण 18.3 : निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, एक आयत चित्र बनाइए और एक बारंबारता बहुभज बनाइए।

51 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का बारंबारता बंटन

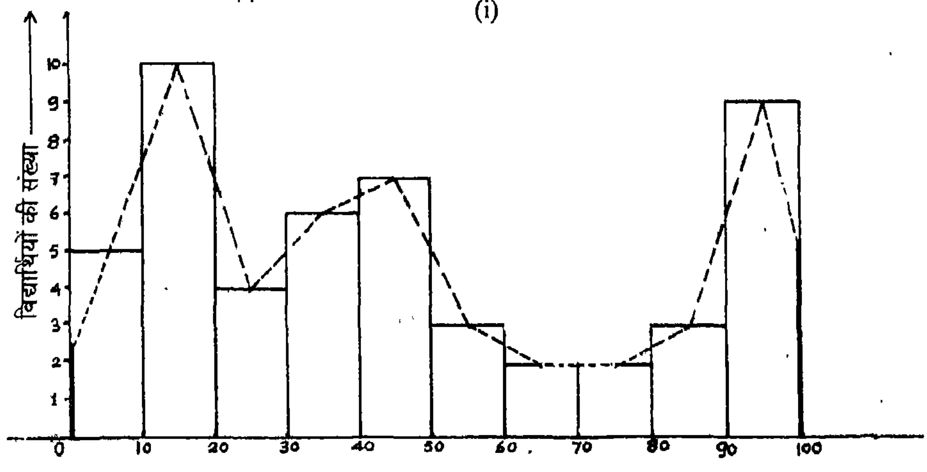
अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	5
10-20	10
20-30	4
30-40	6
40-50	7
50-60	3
60-70	2
70-80	2
80-90	3
90-100	9
कुल जोड़	51

हल : आकृति 18.3 (i) और आकृति 18.3 (ii) में एक आयत चित्र और एक बारंबारता बहुभुज (बिन्दुकित रेखा से), एक ही पैमाने पर दिखाये गए हैं। किन्तु हम आकृति 18.3 (i) की विधि को प्रयोग करेंगे। [देखिए पृष्ठ 392, (तारांकित)]

यदि आयत चित्र और बारंबारता बहुभुज दोनों ही खींचने हों, तो यही उपयुक्त होगा कि पहले आयत चित्र बनाया जाए और फिर आयत-चित्र के आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बारंबारता बहुभुज प्राप्त किया जाए। परन्तु यदि केवल बारंबारता बहुभुज ही बनाना हो तो पहले वर्ग-अंतराल के मध्य-बिन्दुओं को x- अक्ष पर, और बारंबारता को y- अक्ष पर निरूपित किया जाए, और फिर प्रत्येक वर्ग मध्य बिन्दु और संगत बारंबारता द्वारा निश्चित बिन्दु को आलेखित किया जाए और अन्त में उनको इस प्रकार जोड़ा जाए जैसे ऊपर स्पष्ट किया गया है।



(i)



(ii)

आकृति 18.3 [(i) और (ii)] : 51 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का आयत-चित्र तथा बारंबारता बहुभुज

18.6 संचयी बारंबारता वक्र या तोरण

जिस प्रकार एक बारंबारता बहुभुज, बारंबारता बंटन का आलेख होता है ठीक उसी प्रकार संचयी *बारंबारता वक्र* (cumulative frequency curve) या *तोरण* (ogive) संचयी बारंबारता बंटन का

आलेख होता है।

संचयी बारंबारता वक्र खींचने के लिए वर्गों की उपरि सीमाओं को भुज (abscissae) और उनके संगत संचयी बारंबारता को कोटि (ordinates) मान कर बिन्दुओं को आलेखित करते हैं। फिर इन बिंदुओं को मिलाते हुए हम एक मुक्त हस्त निष्कोण वक्र (free hand smooth curve) खींचते हैं। यही अभीष्ट संचयी बारंबारता वक्र या तोरण हैं। यह एक नीचे से ऊपर की ओर बढ़ता हुआ वक्र होता है।

आइए हम निम्नलिखित आँकड़ों पर विचार करें और उनका तोरण खींचें।

100 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का बारंबारता बंटन

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	7
10-20	10
20-30	23
30-40	51
40-50	6
50-60	3
कुल जोड़	100

हम पहिले एक सारणी बनाएं जो संचयी बारंबारता बंटन को प्रदर्शित करें।

100 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का संचयी बारंबारता सारणी

अंक 'से कम'	संचयी आवृति
10	7
20	17 (10 + 7)
30	40 (23 + 17)
40	91 (51 + 40)
50	97 (6 + 91)
60	100 (3 + 97)

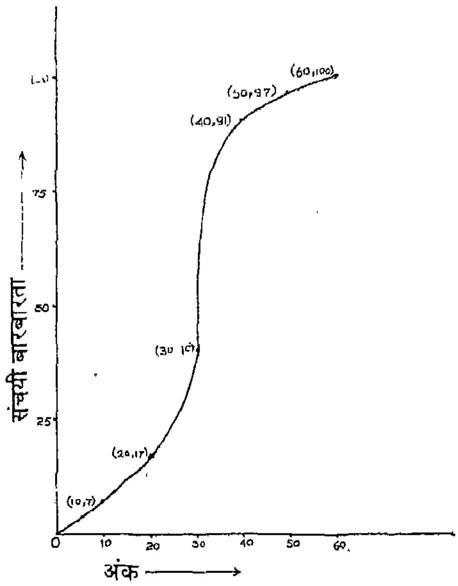
वर्गों की उपरि सीमाएं हैं : 10, 20, 30, 40, 50, 60

वर्गों की उपरि सीमाओं को x - अक्ष पर निरूपित करते हैं।

संचयी बारंबारता को y- अक्ष पर निरूपित करते हैं।

वर्ग उपरि सीमा को x-निर्देशांक मानकर, और संगत संचयी बारंबारता को y-निर्देशांक मानकर, बिन्दुओं का आलेखन करते हैं।

इस प्रकार आलेखित किये गए बिन्दुओं को मुक्त हस्त से खींचे गए वक्र द्वारा जोड़ते हैं जिससे संचयी बारंबारता वक्र (या तोरण) प्राप्त होता है।



आकृति 18.4 : 100 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अकों का तोरण

टिप्पणी : सचयी बारंबारता वक्र या तोरंण खींचते समय हम यह कल्पना कर लेते हैं कि सबसे पहले वर्ग अन्तराल से पहले भी एक वर्ग अन्तराल है जिसकी बारंबारता शून्य है।

प्रश्नावली 18.2

1. निम्न सारणी में एक नगर की (10-34) आयु वर्ग की साक्षर स्त्रियों की संख्या दी गई है:

आयुवर्ग	स्त्रियों की संख्या (निकटतम दस)
10-14	300
15-19	980
20-24	800
25-29	580
30-34	290
कुल जोड़	2950

ऊपर दिए गए आँकड़ों को प्रदर्शित करने के लिए, एक आयतचित्र बनाइए।

2. 100 व्यक्तियों की लंबाइयों (सेमी में) का बंटन इस प्रकार है:

वर्ग अतराल (सेमी)	बारंबारता
145-155	3
155-165	35
165-175	25
175-185	15
185-195	20
195-205	2
कुल जोड़	100

इस बारंबारता बंटन को आयत-चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

3. एक प्रश्न को हल करने में 25 विद्यार्थियों द्वारा लिया गया समय (सेकण्डों में) इस प्रकार है:

16, 20, 26, 27, 28, 30, 33, 37, 38, 40, 42, 43, 46, 46, 46, 48, 49, 50, 53, 58, 59, 60, 64, 52, 20.

(क) 10 सेकण्ड की वर्ग माप लेकर, इन आँकड़ों के लिए बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

(ख) इस बारंबारता बंटन को प्रदर्शित करने के लिए एक आयत चित्र बनाइए।

4. 50 व्यक्तियों के भार (किग्रा में) का बंटन इस प्रकार है:

भार (किग्रा में)	व्यक्तियों की संख्या
50-55	12
55-60	8
60-65	5
65-70	4
70-75	5
75-80	7
80-85	6
85-90	3
कुल जोड़	50

ऊपर दिये गए आँकड़ों के लिए एक आयत-चित्र बनाइए।

5. नीचे दिए आँकड़े एक नगर के, दो साल के मासिक निर्वाह व्यय सूचकांक दिखाते हैं। इनके लिए एक आयत-चित्र और साथ में एक बारंबारता बहुभुज बनाइए।

निर्वाह व्यय सूचकांक	महीनों की संख्या
440-460	2
460-480	4
480-500	3
500-520	5
520-540	3
540-560	2
560-580	1
580-600	4
कुल जोड़	24

6. एक नगर के, श्रमिकों के घर के व्यय (रुपयों में) का बंटन नीचे दिया गया है:

व्यय *(रुपयों में)*	बारंबारता
100-150	25
150-200	40
200-250	33
250-300	28
300-350	30
350-400	22
400-450	16
450-500	8
कुल जोड़	202

ऊपर दिये आँकड़ों के लिए, एक आयत-चित्र और एक बारंबारता बहुभुज बनाइए।

7. पाठ योग्यता की एक परीक्षा में, कक्षा IV के विद्यार्थियों के दो समूहों द्वारा प्राप्त अंकों का बंटन नीचे दिया गया है:

वर्ग अंतराल	समूह A	समूह B
50-52	4	2
47-49	10	3
44-46	15	4
41-43	18	8
38-40	20	12
35-37	12	17
32-34	13	22
कुल जोड़	92	68

एक ही निर्देशांक अक्षों पर, प्रत्येक समूह के लिए, एक बारंबारता बहुभुज बनाइए।

8. एक स्कूल की कक्षा V के 60 विद्यार्थियों की बुद्धि लब्धियाँ (intelligence quotients) नीचे की सारणी में दी गई हैं।

बुद्धि लब्धियां	बारंबारता
125.5-132.5	1
118.5-125.5	3
111.5-118.5	4
104.5-111.5	6
97.5-104.5	10
90.5- 97.5	12
83.5- 90.5	15
76.5- 83.5	5
69.5- 76.5	3
62.5- 69.5	1
कुल जोड़	60

ऊपर के आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बहुभुज बनाइए।

9. एक मैडिकल प्रवेश परीक्षा में, 230 परीक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का बारंबारता बंटन, नीचे दिया गया है:

अंतराल (अंक)	बारंबारता
400-450	20
450-500	35
500-550	40
550-600	32
600-650	24
650-700	27
700-750	18
750-800	34
कुल जोड़	230

ऊपर के आँकड़ों को प्रदर्शित करने के लिए, एक संचयी बारंबारता वक्र (तोरण) बनाइए।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 8.1

3. बिन्दु A, B, C तथा D संरेख हैं।

प्रश्नावली 8.2

1. 16 2. एक 3. AB, AC, BC 4. (i) $\overrightarrow{BA}$ (ii) $\{A\}$ 5. $28°$
6. (i) $68°$ (ii) $27°$ (iii) $45°$ (iv) $15°$ 7. $52°$ 8. $120°$ 10. $105°$

प्रश्नावली 9.1

1. (i) $105°$ (ii) $70°$ 2. $30°$ 3. $a = 130°$, $b = 50°$ 5. $90°$

प्रश्नावली 9.2

1. (i) $45°$ (ii) $125°$ 2. $15°$ 3. $c = 40°$, $d = 50°$, $e = 90°$, $f = 40°$

प्रश्नावली 9.3

2. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 108°$
$\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 72°$

प्रश्नावली 9.4

1. $25°$. 2. $40°, 60°, 80°$
3. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हां (iv) नहीं (v) नहीं (vi) हां 4. $50°, 30°, 100°$

प्रश्नावली 9.5

1. $70°, 80°$ 2. $35°, 65°, 80°$

प्रश्नावली 9.6

1. 120° **2.** 36°, 72°, 108°, 144° **3.** 120° **4.** 5

5. (क) 18 (ख) 8 (ग) 72 (घ) 20

प्रश्नावली 11.3

5. (ख), (ग) तथा (घ); (ग); (घ)

प्रश्नावली 12.1

5. एक बिन्दु **6.** कोई बिन्दुपथ नहीं है।

प्रश्नावली 12.2

1. हां **2.** कोण *BAC* के समद्विभाजक तथा रेखा *PQ* का प्रतिच्छेद बिन्दु

3. $\angle BAC$ का समद्विभाजक

प्रश्नावली 12.3

1. (क) 9 (ख) 8 (ग) 2.5

4. $\angle BAC$ के समद्विभाजक तथा रेखा *BC* का प्रतिच्छेद बिन्दु

प्रश्नावली 13.1

2. 8.25 सेमी

प्रश्नावली 13.4

7. रेखा, *AB* के समांतर तथा *AB* से $\dfrac{2x}{AB}$ की दूरी पर

प्रश्नावली 14.3

2. हां

प्रश्नावली 15.1

1. (क) त्रिभुज, हां (ख) आयत, हां (ग) समांतरचतुर्भुज, नहीं
2. (क) हां, तीन (ख) हां, एक (ग) नहीं
3. (क) हां, दो (ख) हां, एक (ग) हां, चार
4. (क) हां, एक (ख) हां, एक (ग) हां, तीन
5. (क) चार (ख) अपरिमित (ग) एक
6. (क) तीन (ख) छः (ग) नहीं
7. $A = \{B, C, D, E, H, I, O\}$
   $B = \{A, H, M, O, Y, T\}$
   $C = \{F, G, J, K, L, N, P, Q, R, S, Z\}$
   $D = \{H, O, X\}$

प्रश्नावली 15.3

15. (क) असत्य (ख) सत्य (ग) सत्य (घ) सत्य (ङ) असत्य (च) असत्य (छ) सत्य
    (ज) असत्य (झ) सत्य (ञ) असत्य

प्रश्नावली 16.1

1. (क) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1$ (ख) $\frac{12}{13}, \frac{12}{13}, \frac{12}{5}$
   (ग) $\frac{5}{13}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}$ (घ) $\frac{21}{29}, \frac{21}{29}, \frac{21}{20}$

प्रश्नावली 16.2

1. $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}, \; \tan A = \frac{2}{\sqrt{5}}$
2. $\sin B = \frac{3}{5}, \; \tan B = \frac{3}{4}$

3. $\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\tan\theta = 2\sqrt{6}$

4. $\sin C = \frac{11}{\sqrt{122}}$, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{122}}$

5. $\cos\beta = \frac{2\sqrt{26}}{15}$, $\tan\beta = \frac{11}{2\sqrt{26}}$

6. $\sin M = \frac{5}{13}$, $\cos M = \frac{12}{13}$

प्रश्नावली 16.3

1. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos A = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\tan A = \frac{1}{3}$,

$\sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\cot A = 3$

2. $\sin\theta = \frac{20}{29}$, $\cos\theta = \frac{21}{29}$ 3. $\frac{16\sqrt{2}+3}{8}$

4. $\frac{15-\sqrt{5}}{2}$ 6. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ 8. 2

प्रश्नावली 16.4

1. (क) -2 (ख) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ग) $2+\frac{\sqrt{6}}{3}$

(घ) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ (ङ) $2(2+\sqrt{3})$

प्रश्नावली 16.5

1. 11.53 मी 2. 2.59 मी 3. 14.1 मी 4. 150 मी 5. 57.67 मी, 86.5 मी, 28.83 मी 6. 3460 किमी 7. 30 मी 8. 25.95 मी 9. 36.5 मी 10. 16.55 मी 11. 236.5 मी 12. 38.93 मी

प्रश्नावली 18.1

6. (क)

तापमान (डिग्री सेल्सियस में)	बारम्बारता
28—29	1
29—30	0
30—31	2
31—32	3
32—33	4
33—34	4
34—35	4
35—36	3
36—37	6
37—38	4
कुल जोड़	31

(ख)

सापेक्ष आर्द्रता (प्रतिशत में)	बारम्बारता
50—60	5
60—70	4
70—80	6
80—90	9
90—100	7
कुल जोड़	31

9.

बिजली के बिल (रुपयों में)	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
4—8	2	2
9—13	2	4
14—18	4	8
19—23	2	10
24—28	6	16
29—33	2	18
34—38	1	19
39—43	1	20
44—48	3	23
49—53	1	24
54—58	1	25
कुल जोड़	25	

10. (i) 16 (ii) 31, 35 (iii) 48 (iv) 5 **12.** 5.